Nome: .... Cognome: ....

Matricola: .... Firma: ....

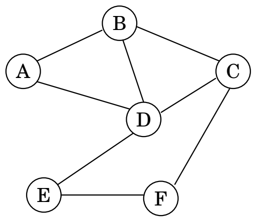
Esame di Ricerca Operativa - 1 settembre 2010
Facoltà di Ingegneria - Udine

Problema 1 (2+2 punti):

Un Independent Set in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme di nodi $X \subseteq V$ tale che per ogni arco $uv \in E$ di G almeno uno degli estemi (u o v) non è in X. Un independent set di G è detto massimale se non esiste un altro independent set di G che lo contenga propriamente.

Ad esempio, $\{A, C\}$ e $\{C, E\}$ sono due independent sets non-massimali mentre $\{A, C, E\}$ e $\{D, F\}$ sono due independent sets massimali per il grafo G in figura.

Quando ad ogni nodo v è associato un costo w_v, allora il costo di $X \subseteq V$ è espresso da $val(X) := \sum_{v \in X} w_v$.



	A	B	C	D	E	F
Costo	12	13	15	14	11	16

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare independent sets massimali di costo minimo.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un independent set massimale di costo minimo per il grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un independent set massimale di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 2 (4 punti):

Per produrre un suo mangime, l'allevamento di tacchini BellGross miscela 4 diversi tipi di farina. La composizione di ciascuna farina, espressa in percentuale per kg di farina, e il costo unitario (Euro/kg) sono espressi nella seguente tabella:

	% zuccheri	% proteine	% ormoni crescita	costo al kg
OGM 1	7	4	6	680
OGM 2	9	4	5	750
organico	3	1	2.5	50
bio	8	6	1	870

Si tenga conto che il mangime finale deve contenere una percentuale di proteine tra il 6% e l'8%, una percentuale di ormoni tra il 3% e il 5%, e una percentuale di zuccheri non inferiore al 5%. Formalizzare come problema di PL il problema di comporre il mangime dalle farine con l'obiettivo di minimizzare i costi.

Problema 3 (4 punti):
Un robot R deve portarsi dalla cella A–1 alla sua home H nella cella G–8.

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	R	·	·	·	·	·	●	·
B	·	·	·	●	●	·	·	·
C	·	·	·	·	·	·	·	·
D	·	●	·	·	·	●	·	·
E	·	·	·	●	·	·	·	·
F	·	·	·	·	·	·	·	·
G	·	·	·	●	·	·	·	H

I movimenti base possibili sono il passo verso destra (ad esempio dalla cella A–3 alla cella A–4), il passo verso in basso (ad esempio dalla cella A–3 alla cella B–3), ed il passo obliquo basso/destra (ad esempio dalla cella A–1 alla cella B–2). Tuttavia il robot non può visitare le celle occupate da un pacman (●). Quanti sono i percorsi possibili?

2.1(1pt) Quanti sono i percorsi possibili se la partenza è in A–1?

2.2 (1pt) e se la partenza è in B–3?

2.2 (1pt) e se con partenza in A–1 il robot deve giungere in F–6?

2.4 (1pt) partenza in A–1 ed arrivo in G–8, al robot viene richiesto di passare per D–5.

consegna	numero percorsi
A–1 → G–8	
B–3 → G–8	
A–1 → F–6	
passaggio per D–5	

Problema 4 (4 punti):
Trovare la più lunga sottosequenza comune tra le stringhe $s = GCACTGAGGAGACTACG$ e $t = ACGTCAGTCAGGAACGC$. Fare lo stesso con alcuni suffissi di s e t.

3.1(1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e t?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto che la sottosequenza comune incominci con 'T'?

3.3 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra s e il suffisso $t_9 = CAGGAACGC$ di t?

3.4 (1pt) quale è la più lunga sottosequenza comune tra t e il prefisso $s^{14} = GCACTGAGGAGACT$ di s?

tipo di sottosequenza comune	lunghezza	sottosequenza
qualsiasi		
parte con 'T'		
tra s e t_9		
tra s^{14} e t		

Problema 5 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

12	5	7	2	6	22	29	53	9	26	54	9	32	20	47	49	10	8	3	26	51	14	31	43	15

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 10. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 10		

Problema 6 (8 punti):

$$\max\ 3x_1 + 20x_2 - 5x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 5x_3 \geq 5 \\ -2x_1 + 10x_2 - x_3 \leq 4 \\ 3x_1 - 20x_2 + 5x_3 \leq 5 \\ x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1 \leq 0 \end{cases}$$

6.1(1pt) Portare il problema in forma standard.

6.2(1pt) Impostare il problema ausiliario.

6.3(1pt) Risolvere il problema ausiliario.

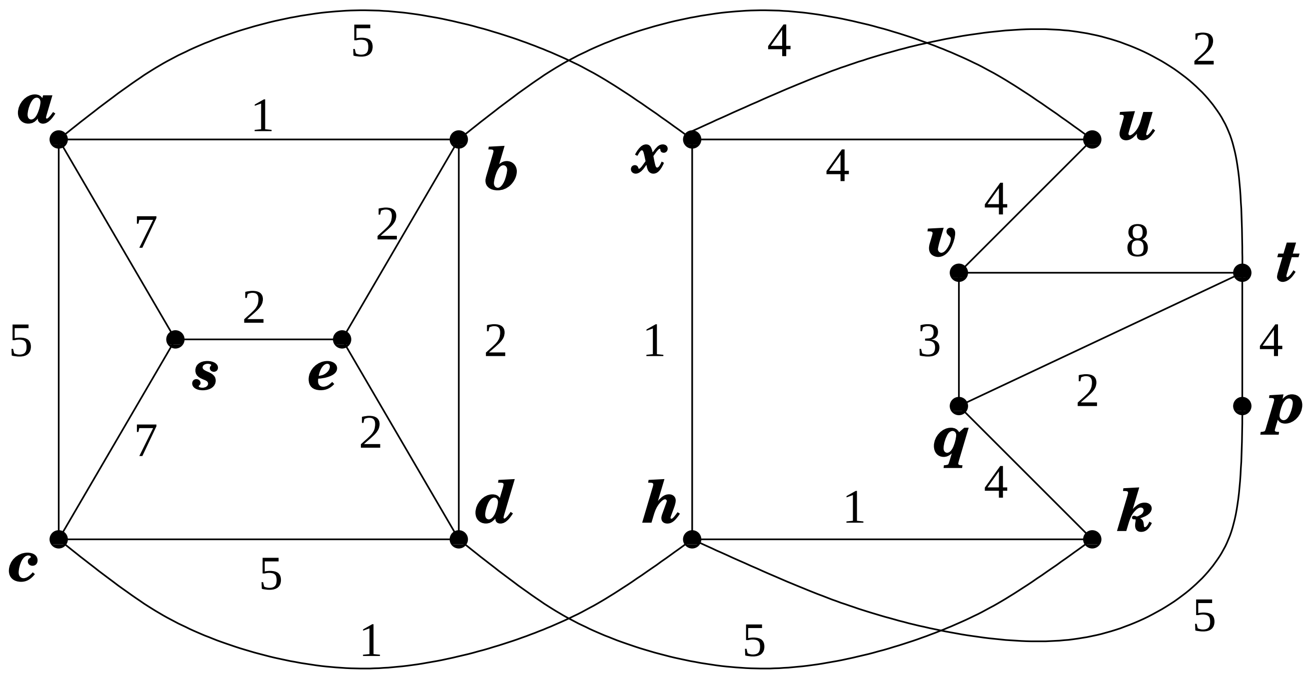
6.4(1pt) Ottenere una soluzione ammissibile di base al problema originario.

6.5(1pt) Risolvere il problema originario all'ottimo.

6.6(1pt) Quanto si sarebbe disposti a pagare per ogni unità di incremento per l'availability nei tre vincoli? (Per piccole variazioni.)

6.7(2pt) Fino a dove si sarebbe disposti a pagare tali prezzi ombra?

Problema 7 (10 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.



7.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no. In ogni caso, disegnare il grafo in modo da minimizzare il numero di incroci tra archi.

7.2.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto da G sostituendo l'arco se con l'arco hv è planare oppure no.

7.3.**(1+1pt)** Trovare l'albero dei cammini minimi dal nodo s. Esprimere la famiglia di tali alberi.

7.4.**(1pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

7.5.**(1pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

7.6.**(2pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

7.7.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.