

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

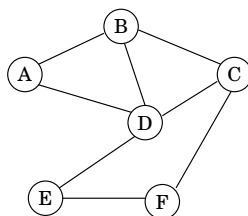
FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 10 settembre 2009 Facoltà di Ingegneria - Udine

Problema 1 (2+2 punti):

Un NODE-COVER in un grafo $G = (V, E)$ è un sottoinsieme $X \subseteq V$ tale che ogni arco in E ha almeno un estremo in X .

Ad esempio, gli insiemi $\{B, D, F\}$ e $\{A, B, E, C\}$ sono due possibili node-covers per il grafo G in figura.



Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare node-covers fatti dal minor numero possibile di nodi.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un minimo node-cover sul grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un minimo node-cover su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 2 (4 punti):

L'azienda elettrica senese deve soddisfare il fabbisogno di tre centri abitati che richiedono giornalmente la seguente quantità di energia (in MW):

Murlo	Monticiano	S.Rocco a Pilli
150	80	210

I tre centri possono essere riforniti da due centrali C_1 e C_2 , aventi capacità giornaliera di 130 e 310 MW rispettivamente. Trasportare corrente elettrica da una centrale a un centro costa come indicato nella seguente tabella (Euro/KW)

	Murlo	Monticiano	S.Rocco a Pilli
C_1	10	15	20
C_2	8	14	7

Formulare come PL il problema di minimizzare il costo di trasporto dell'energia ai centri abitati, nel caso in cui ogni linea elettrica abbia una capacità massima di 100 MW.

Problema 3 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B .

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P
peso	2	8	13	13	14	6	13	10	3	16	11	4	9	11
valore	11	39	63	63	60	33	30	36	13	66	60	20	37	48

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

B	max val	peso	quali prendere
36			
26			
33			
22			

Problema 4 (4 punti):

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

9	-7	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-3	7
---	----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	---	----	---	----	---

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
9	2			33	0	31	11		3	19	0	5			8	14	6	27	2	15	0	7	1			10
9	-7	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-3	7
33	24			21	0		3		0	16	0	20			0	19	13	21	0			10	3			7
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include primo		1			
include 9°					
include 5° e 10°					
include 17°					
include 14° e 16°					

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

Problema 5 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

25	18	20	15	19	35	42	66	18	39	67	22	45	33	60	62	23	21	15	39	64	27	44	56	25
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

5.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(2pt) una sequenza è detta una Z-sequenza, o sequenza crescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale che ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l' i -esimo sono strettamente maggiori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga Z-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 23. Specificare quanto è lunga e fornirla.

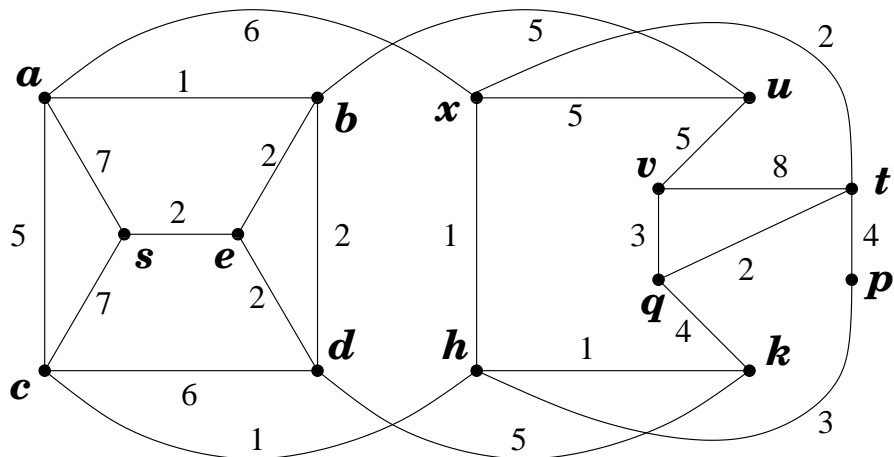
tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
Z-sequenza		
crescente con 23		

Problema 6 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\begin{cases} \max & x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 19x_4 + 10x_5 + C_6x_6 \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \leq 36 \\ & x_3 + x_4 & \leq 10 \\ & & x_5 + x_6 & \leq 14 \\ x_1 & + x_3 & + x_5 & \leq 20 \\ & x_2 & + x_4 & + x_6 & \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

- 1.1.(1pt) Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.
- 1.2.(1pt) Scrivere il problema duale.
- 1.3.(1pt) Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.
- 1.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.
- 1.5.(2pt) Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.



Problema 7 (14 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 5.2.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.3.(2pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.4.(1pt) Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.
- 5.5.(2pt) Dire, per ogni arco del grafo, se esso possa essere rimosso senza allontanare alcun nodo dal nodo s .
- 5.6.(2pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.7.(2pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .
- 5.8.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.
- 5.9.(2pt) Dire, certificandolo, quale sia il minimo numero di nodi la cui rimozione rende il grafo bipartito.
- 5.10.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo ottenuto aggiungendo l'arco di estremi v e p è planare oppure no.