

NOME:

COGNOME:

MATRICOLA:

FIRMA:

Esame di Ricerca Operativa - 9 giugno 2009 Facoltà di Ingegneria - Udine

Problema 1 (2 punti):

Si consideri un classico problema dello zaino dove sono dati n oggetti, con ciascun oggetto $i = 1, 2, \dots, n$ caratterizzato da un peso (o prezzo) p_i e da un valore (o ricavo) v_i . Dato un budget B , vogliamo trovare una sottocollezione di oggetti a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non possa eccedere il budget B .

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI).

Problema 2 (5 punti):

La Loamed è un'azienda che produce snack. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Loamed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non più del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Loamed. Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.

Problema 3 (4 punti):

Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
----	---	-----	----	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	-----	----	-----	----	-----	---	-----	----	-----	---	----	----	-----	----	----

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←	←
0	6			15	27	0	5	0		0	46	25	59				84	30	60	37	46	41	51			54
-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
26	30			32		36	63	58			103	57	78	44				0	30	0	21	12		7	17	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi			
include 19-esimo			
include ultimo			
include quarto			
include 6° e 10°			

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
---	----	---	---	---	----	----	----	---	----	----	---	----	----	----	----	----	---	---	----	----	---	----	----	----	----

- 4.1(1pt)** trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.2(1pt)** trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.3(1pt)** Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.
- 4.4(1pt)** trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 7. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente		
decrescente		
V-sequenza		
crescente con 7		

Problema 5 (5 punti):

Si utilizzi un approccio di branch & bound per risolvere il seguente problema di PLI.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 8x_2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad x_1, x_2 \text{ intere.} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Indicazioni. Si faccia branch sulle variabili con valore più lontano da un intero, optando per le variabili di indice minimo in caso di parità. Quando si generano due figli, si esplori dapprima il figlio ottenuto aggiungendo un vincolo del tipo $x_i \leq \lfloor \tilde{x}_i \rfloor$ e nell'esplorazione dell'albero si adotti una politica DFS (Depth First Search). Se l'upper bound proveniente dal rilassamento lineare dovesse risultare inferiore al lower bound attuale incrementato di uno (indicando che la miglior soluzione per il problema associato al nodo corrente non può comunque migliorare la miglior soluzione incontrata fino a quel momento) il nodo corrente viene abortito (fathoming). Si specifichi, ad ogni nodo dell'albero di branch & bound, quale problema di PL venga risolto, quale ne sia la soluzione ottima (fornendone certificato di ottimalità), e se e quali nodi figlio vengano prodotti.

Problema 6 (4 punti):

Il topino Aladino, dotato di uno zaino di capacità $B = 36$, ha compilato la Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino che puoi trovare di seguito.

TABELLA DI PROGRAMMAZIONE DINAMICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36			
<i>F</i> (4, 10)	0	.	.	.	10
<i>I</i> (5, 8)	0	.	.	.	10	8	.	.	.	18	
<i>T</i> (5, 12)	0	.	.	.	10	12	.	.	.	22	20	.	.	.	30	
<i>O</i> (9, 22)	0	.	.	.	10	12	.	.	.	22	20	.	.	32	34	42	.	.	.	52		
<i>S</i> (13, 24)	0	22	20	.	.	32	34	42	.	.	46	52	.	.	56			
<i>A</i> (13, 26)	0	22	20	.	.	32	34	.	.	44	42	.	.	48	52	.	.	56	.	.	.	60	70	68	66	.	.	72	.			
<i>P</i> (15, 24)	0	22	20	.	.	32	34	24	.	44	42	36	.	.	.	46	44	58	60	56	.	60	70	68	68	66	72	.	.			
<i>Q</i> (17, 40)	0	22	20	.	.	32	34	24	.	44	42	36	50	.	.	46	44	.	60	56	58	72	74	68	68	76	84	.	.			
<i>B</i> (22, 42)	0	22	20	.	.	32	34	24	.	40	44	42	36	50	52	.	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	.	.		
<i>R</i> (24, 44)	0	22	20	.	.	32	34	24	.	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	.	.		

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	F	I	T	O	S	A	P	Q	B	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

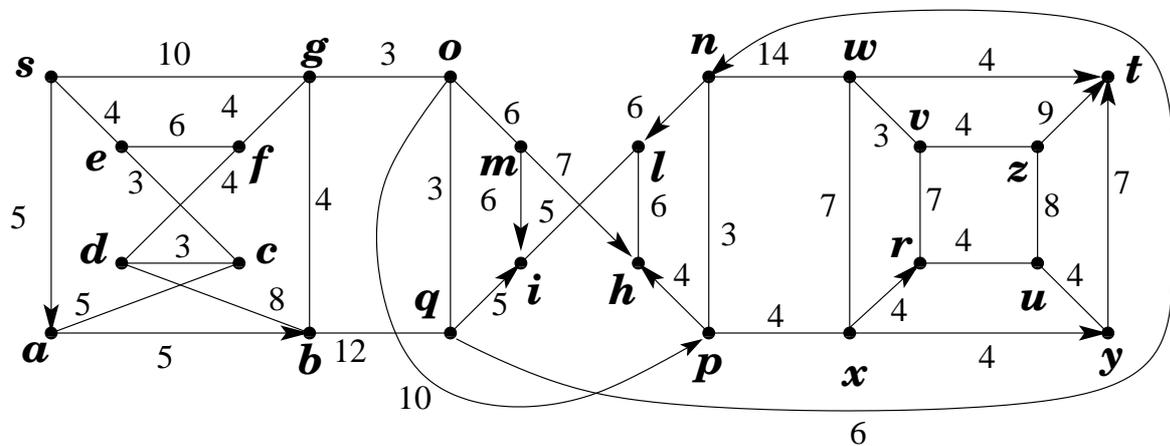
Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36			
26			
33			
22			

Tuttavia il topino ha erroneamente rosicchiato via alcune parti delle tabelle. Aiutalo a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

Problema 7 (15 punti):

Si consideri il grafo G , con pesi sugli archi, riportato in figura.



- 5.1.(1pt) Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.
- 5.2.(3pt) Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.
- 5.3.(2pt) Trovare un albero ricoprente di peso minimo.
- 5.4.(3pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).
- 5.5.(3pt) Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t .
- 5.6.(3pt) Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t .

Problema 8 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\begin{cases} \max x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 11x_4 + 5x_5 + C_6x_6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_3 + x_4 + x_6 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

- 1.1.(1pt) Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.
- 1.2.(1pt) Scrivere il problema duale.
- 1.3.(1pt) Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.
- 1.4.(1pt) Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.
- 1.5.(1pt) Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

LEGGERE CON MOLTA ATTENZIONE:**PROCEDURA DA SEGUIRE PER L'ESAME -controllo**

- 1) Vostro nome, cognome e matricola vanno scritti, prima di incominciare il compito, negli appositi spazi previsti nell'intestazione di questa copertina. Passando tra i banchi verificherò l'esatta corrispondenza di alcune di queste identità. Ulteriori verifiche alla consegna.
- 2) Non è consentito utilizzare alcun sussidio elettronico.
- 3) Una volta che sono stati distribuiti i compiti non è possibile allontanarsi dall'aula per le prime 2 ore. Quindi: (1) andate al bagno prima della distribuzione dei compiti e (2) non venite all'esame solo per fare i curiosi (i testi vengono pubblicati sul sito successivamente all'esame).

PROCEDURA DA SEGUIRE PER OGNI ESERCIZIO -assegnazione punti

- 1) La risoluzione **COMPLETA ed ESAURIENTE** dell'esercizio "in bella copia" deve trovare spazio in fogli da inserire in questa copertina ripiegata a mo' di teca (intestazione con vostri dati personali su faccia esterna della teca, per facilità di controllo).
- 2) Tutti i fogli consegnati, inclusa la copertina, debbono riportare NOME, COGNOME e MATRICOLA (sia per l'assegnazione dei punti che per il controllo).
- 3) Trascrivere i risultati ottenuti negli appositi riquadri della copertina, ove previsti.

COMUNICAZIONE ESITI E REGISTRAZIONE VOTI -completamento esame

I voti verranno resi disponibili sotto SINDI. Dal 18 in sù potete registrare il voto: basta che esprimiate il vostro consenso sotto SINDI. Ad alcuni di voi verrà richiesto di completare la prova scritta con un orale, ma costoro sono esonerati dal presentarsi a me per un orale qualora intendano comunque rifare lo scritto. I voti scadono dopo alcuni mesi (li garantiamo per 3 mesi) od alla consegna di un successivo scritto.