Esame di Ricerca Operativa - 10 giugno 2009
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

La Coloraben mira ad affermarsi nella vendita di tinte e smalti. La disponibilità di vernici base in magazzino, per le vendite del prossimo mese, è la seguente: 550 kg di bianco, 150 kg giallo, 90 kg di rosso e 70 kg di verde. Ogni barattolo messo sul mercato contiene 500 grammi di una tinta ottenuta miscelando le quattro vernici base. La Coloraben propone quattro tipi di tinte, descritte di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
tinta 1	solo bianco	260
tinta 2	non piú del 50% di bianco almeno il 10% di rosso almeno il 15% di giallo	400
tinta 3	solo giallo	510
tinta 4	almeno il 30% di giallo almeno il 20% di rosso almeno il 30% di verde	520

Quindi un barattolo di tinta 2 potrebbe ad esempio essere composto al 45% di bianco, 10% di rosso, 20% di giallo, e 25% di verde.

Supponendo che tutto quanto miscelato venga venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Coloraben.

svolgimento.

Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{B1} = quantità di bianco (in kg) utilizzata per produrre tinta 1;
- x_{B2} = quantità di bianco (in kg) utilizzata per produrre tinta 1;
- x_{R2} = quantità di rosso (in kg) utilizzata per produrre tinta 2;
- x_{V2} = quantità di verde (in kg) utilizzata per produrre tinta 2;
- x_{G2} = quantità di giallo (in kg) utilizzata per produrre tinta 2;
- x_{G3} = quantità di giallo (in kg) utilizzata per produrre tinta 2;
- x_{B4} = quantità di bianco (in kg) utilizzata per produrre tinta 4;
- x_{R4} = quantità di rosso (in kg) utilizzata per produrre tinta 4;
- x_{V4} = quantità di verde (in kg) utilizzata per produrre tinta 4;
- x_{G4} = quantità di giallo (in kg) utilizzata per produrre tinta 4;
- y_1 = numero di barattoli di tinta 1 prodotti;
- y_2 = numero di barattoli di tinta 2 prodotti;
- y_3 = numero di barattoli di tinta 3 prodotti;
- y_4 = numero di barattoli di tinta 4 prodotti.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate ad essere intere. L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei quattro tipi di confezioni ossia

$$\max R \quad = \quad 260\, y_1 + 400\, y_2 + 510\, y_3 + 520\, y_4\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$y_1, y_2, y_3, y_4, x_{B1}, x_{B2}, x_{R2}, x_{V2}, x_{G2}, x_{G3}, x_{B4}, x_{R4}, x_{V4}, x_{G4} \geq 0.$$

vincoli sulla composizione

$$\begin{aligned}
x_{B1} &= 0,5\, y_1 \\
x_{B2} + x_{R2} + x_{G2} + x_{V2} &= 0,5\, y_2 \\
x_{G3} &= 0,5\, y_3 \\
x_{B4} + x_{R4} + x_{G4} + x_{V4} &= 0,5\, y_4 \\
x_{B2} &\leq 0,25\, y_2 \\
x_{R2} &\geq 0,05\, y_2 \\
x_{G2} &\geq 0,075\, y_2 \\
x_{R4} &\geq 0,1\, y_4 \\
x_{R4} &\geq 0,15\, y_4 \\
x_{G4} &\geq 0,15\, y_4
\end{aligned}$$

disponibilitá di materie prime

$$\begin{aligned}
x_{B1} + x_{B2} + x_{B4} &\leq 550 \\
x_{G2} + x_{G3} + x_{G4} &\leq 150 \\
x_{R2} + x_{R4} &\leq 90 \\
x_{V2} + x_{V4} &\leq 70
\end{aligned}$$

Ovviamente i vincoli di non negativitá $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ possono essere omessi. Introducendo il vincolo di interezza per le sole 4 variabili y_1, y_2, y_3 e y_4 otteniamo soluzioni intere ottime che possono essere messe in pratica senza arrotondamenti (con conseguente rischio di perdita di precisione nella soluzione del modello matematico intero).

Problema 2 (4 punti):
Il padre di Jasmine le ha chiesto di trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4

Jasmine ha allora compilato la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
0	6			15	27	0	5	0		0	46	25	59				84	30	60	37	46	41	51			54
-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
26	30			32		36	63	58			103	57	78	44				0	30	0	21	12		7	17	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos	arriva a pos
qualsiasi			
include 19-esimo			
include ultimo			
include quarto			
include 6^o e 10^o			

Tuttavia il topino Aladino ha rosicchiato parti delle tabelle. Aiuta Jasmine a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle completamente compilate.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
0	6	0	31	15	27	0	5	0	12	0	46	25	59	48	103	76	84	30	60	37	46	41	51	41	58	54
-4	6	-39	31	-16	12	-27	5	-9	12	-48	46	-21	34	-11	55	-27	8	-54	30	-23	9	-5	10	-10	17	-4
26	30	24	63	32	48	36	63	58	67	55	103	57	78	44	55	0	8	0	30	0	21	12	17	7	17	0
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Ed ha quindi prodotto le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	103	12	16
include 19-esimo	60	12	20
include ultimo	54	12	27
include quarto	63	4	16
include 6^o e 10^o	63	4	16

Problema 3 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 7. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	1	2	3	3	1	1	1	3	2	1	3	2	3	4	2	5	6	7	3	5	7	3	3	3	4
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
1	14	8	2	4	21	28	48	5	26	49	9	32	19	12	46	10	7	3	25	11	6	29	39	44	13
1	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**6**	**7**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**5**	**8**	**9**	**10**	**8**
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	1, 2, 4, 5, 9, 19, 25, 29, 39, 44
decrescente	7	48, 32, 19, 12, 10, 7, 6
V-sequenza	11	48, 32, 19, 12, 10, 7, 3, 25, 29, 39, 44
crescente con 7	9	1, 2, 4, 5, 7, 11, 29, 39, 44

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 4 (4 punti):

Il topino Aladino, dotato di uno zaino di capacità $B = 36$, ha compilato la Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino che puoi trovare di seguito.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$F(4,10)$	0	·	·	·	10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,8)$	0	·	·	·	10	8	·	·	·	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	·	30	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(9,22)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	·		42	·	·	·	52	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(13,24)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·			42	·	·	46	52	·	·	56		·	·	·	68	66	·	·	·	
$A(13,26)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·		44	42	·	·	48	52	·	·			·	·	60	70	68	·	·	72	
$P(15,24)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·		44	42	36	·			46	44	58	60	56		60	70	68	68	66	72	
$Q(17,40)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·		44	42	36	50			46	44		60	56	58	72	74	68	68	76	84	
$B(22,42)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52		46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	
$R(24,44)$	0	·	·	·			·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	

(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	F	I	T	O	S	A	P	Q	B	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36			
26			
33			
22			

Tuttavia il topino ha erroneamente rosicchiato via alcune parti delle tabelle. Aiutalo a ricostruirle, senza dimenticare le risposte!

svolgimento. Per lo svolgimento si seguono i soliti metodi (algoritmi). Riportiamo solamente le tabelle compilate.

Tabella di Programmazione Dinamica per il problema dello Zaino

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$F(4,10)$	0	·	·	·	10	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$I(5,8)$	0	·	·	·	10	8	·	·	·	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$T(5,12)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	·	30	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$O(9,22)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	·	44	42	·	·	·	52	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
$S(13,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	34	44	42	·	·	46	52	·	·	56	58	·	·	·	68	66	·	·	·	76
$A(13,26)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	·	·	36	44	42	·	·	48	52	·	·	58	60	·	·	60	70	68	·	·	72	78
$P(15,24)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	36	44	42	36	·	48	52	46	44	58	60	56	58	60	70	68	68	66	72	78
$Q(17,40)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$B(22,42)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82
$R(24,44)$	0	·	·	·	10	12	·	·	·	22	20	·	·	32	34	24	·	40	44	42	36	50	52	52	46	44	62	60	56	58	72	74	68	68	76	84	82

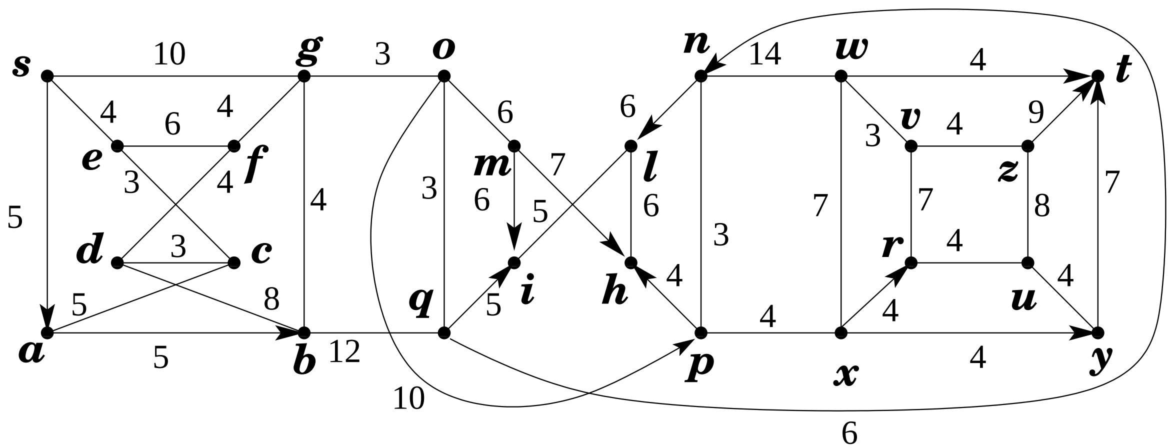
(come stilata in riferimento ai seguenti oggetti)

nome	F	I	T	O	S	A	P	Q	B	R
peso	4	5	5	9	13	13	15	17	22	24
valore	10	8	12	22	24	26	24	40	42	44

Sulla base di tale tabella, Aladino ha fornito le seguenti risposte.

B	max val	peso	quali prendere
36	84=40+22+12+10	35=17+9+5+4	Q,O,T,F
26	62=40+12+10	26=17+5+4	Q,T,F
33	74=40+22+12	31=17+9+5	Q,O,T
22	52=40 +12	22=17+5	Q,T

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

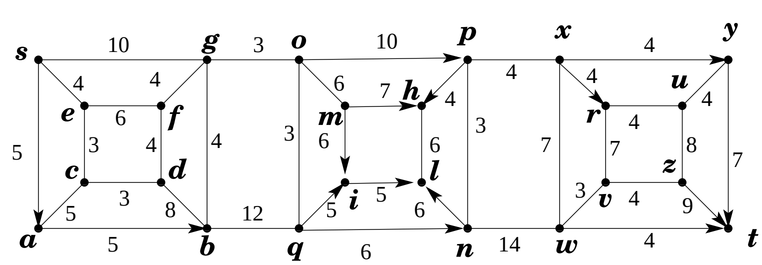
5.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

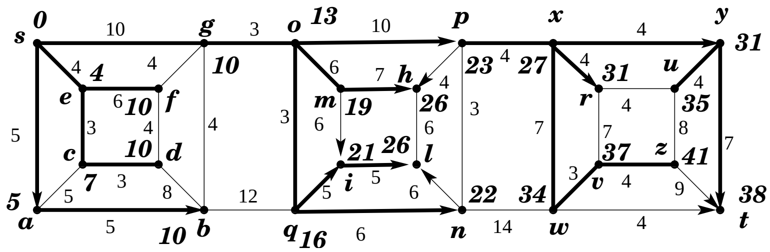
5.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

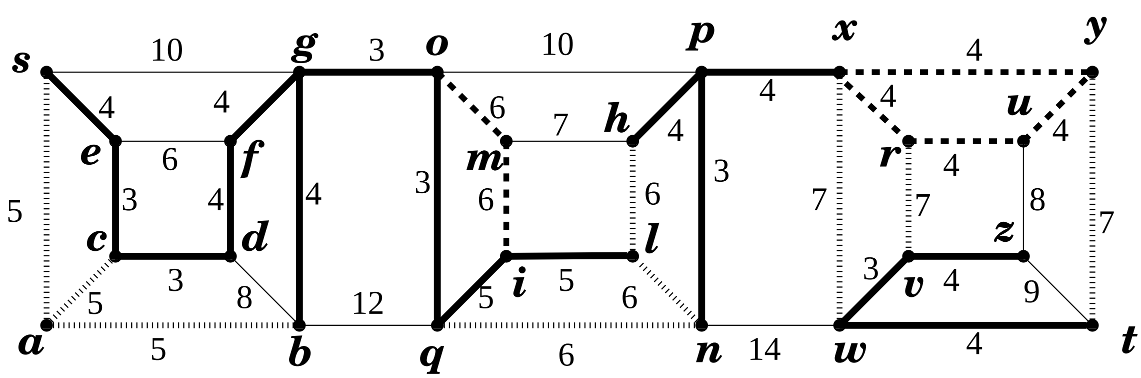
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



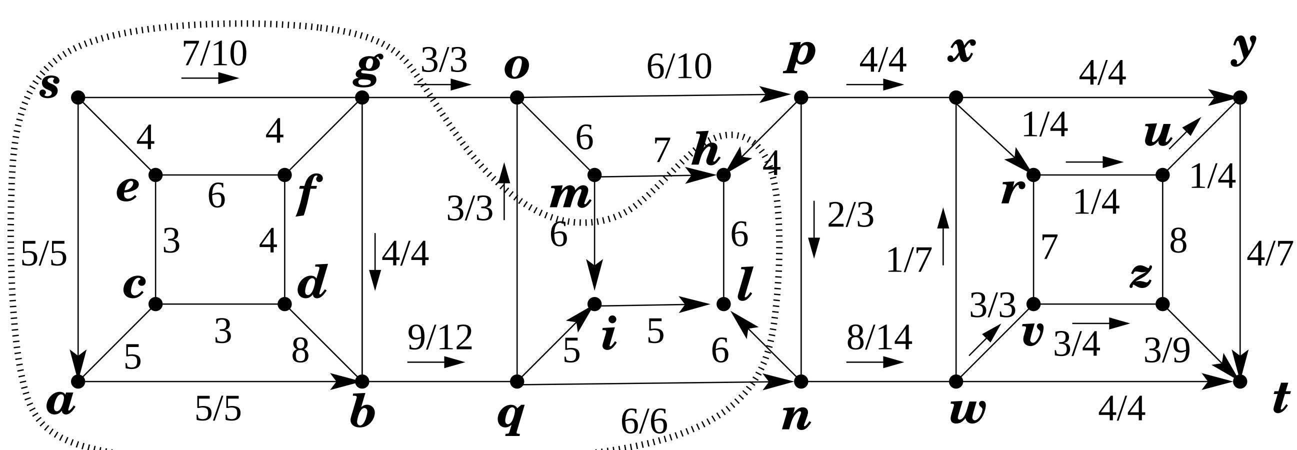
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 16 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea tratteggiata nella zona a destra, più uno qualsisiasi dei 3 tra archi di peso 5 in linea sfumata spessa presenti nella zona a sinistra.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s, t-taglio, anch'esso di valore 12 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.