Esame di Ricerca Operativa - 25 febbraio 2009
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (5 punti):

Un mobilificio produce due tipi di scaffali. Ogni scaffale richiede una certa quantità di legno, un certo numero di viti e bulloni, e un certo numero di ore di manodopera. Sono disponibili complessivamente 100 kg di legno, 500 viti e bulloni (che sono sempre usati a coppie), e 300 ore di manodopera. Tutti i tipi di scafali possono anche essere incollati, e quindi realizzati senza viti e bulloni, tuttavia questa scelta produce un prodotto di minore qualità, venduto quindi a un prezzo inferiore.

Data la seguente tabella in cui sono riportati i dati del problema, formulare come PL il problema di determinare il piano di produzione ottimo.

tipo	legno (kg)	viti/bulloni	manod. (ore)	euro/scaffale avvit.	euro/scaffale incoll.
A	2	4	1.5	250	150
B	1.5	7	3	200	120

svolgimento.

Si indichino con x_A e x_B il numero di scaffali avvitati di tipo A e B prodotti. Si indichino con x'_A e x'_B il numero di scaffali incollati di tipo A e B prodotti.

L'obiettivo é quello di massimizzare i ricavi sulla vendita dei quattro tipi di scaffali ossia

$$\max R = 250\, x_A + 150\, x'_A + 200\, x_B + 120\, x'_B\,,$$

nel rispetto dei seguenti vincoli:

vincoli di non negativitá

$$x_A, x_B, x'_A, x'_B \geq 0.$$

limite sulla quantità di legno

$$2\, x_A + 2\, x'_A + 1.5\, x_B + 1.5\, x'_B \leq 100.$$

disponibilitá di manodopera

$$1.5\, x_A + 1.5\, x'_A + 3\, x_B + 3\, x'_B \leq 300.$$

disponibilitá di viti e bulloni

$$4\, x_A + 7\, x_B \leq 500.$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 36$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	4	13	22	52	27	22	29	23	9	47	48	20	15	5	24	17	5	13	17
valore	15	39	63	90	60	63	48	60	33	98	72	30	36	12	66	60	18	36	48

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 36$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 33$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 22$?

svolgimento. Per lo svolgimento si segua la solita traccia. Riportiamo solamente i risultati finali.

B	max val	peso	quali prendere
36	126=60+33+18+15	35=17+9+5+4	R,I,S,A
26	93=60+18+15	26=17+5+4	R,S,A
33	111=60+33+18	31=17+9+5	R,I,S
22	78=60 +18	22=17+5	R,S

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

14	-12	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-2	6

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di partire dal primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 10^o elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere sia il 6^o che il 10^o elemento?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
14	2	25	12	33	0	31	11	34	3	19	0	5	0	30	8	14	6	27	2	15	0	7	1	6	4	10
14	-12	23	-13	21	-39	31	-20	23	-31	16	-32	5	-15	30	-22	6	-8	21	-25	13	-18	7	-6	5	-2	6
33	19	31	8	21	0	34	3	23	0	16	0	20	15	30	0	19	13	21	0	13	0	10	3	9	4	6
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi	34	7	9	31	23
include primo	33	1	5	14	21
include 10^o	19	7	11	31	16
include 6^o e 10^o	13	1	11	14	16
include 18^o	27	15	19	30	21
include 14^o e 16^o	17	13	19	5	21

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

6	19	13	7	9	26	33	57	10	31	66	14	37	24	17	51	15	12	8	30	16	11	34	44	49	18

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.4(1pt) trovare la più lunga sottosequenza crescente che includa l'elemento di valore 12. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Per poter rispondere alle prime 3 domande compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

CRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
6	19	13	7	9	26	33	57	10	31	66	14	37	24	17	51	15	12	8	30	16	11	34	44	49	18
1	1	2	3	3	1	1	1	3	2	1	3	2	3	4	2	5	6	7	3	5	7	3	3	3	4
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

DECRESCENTE

Infine, per rispondere all'ultima domanda, computo partendo da destra un'ulteriore sequenza di valori come riportati in neretto nella seguente tabella.

CRESCENTE

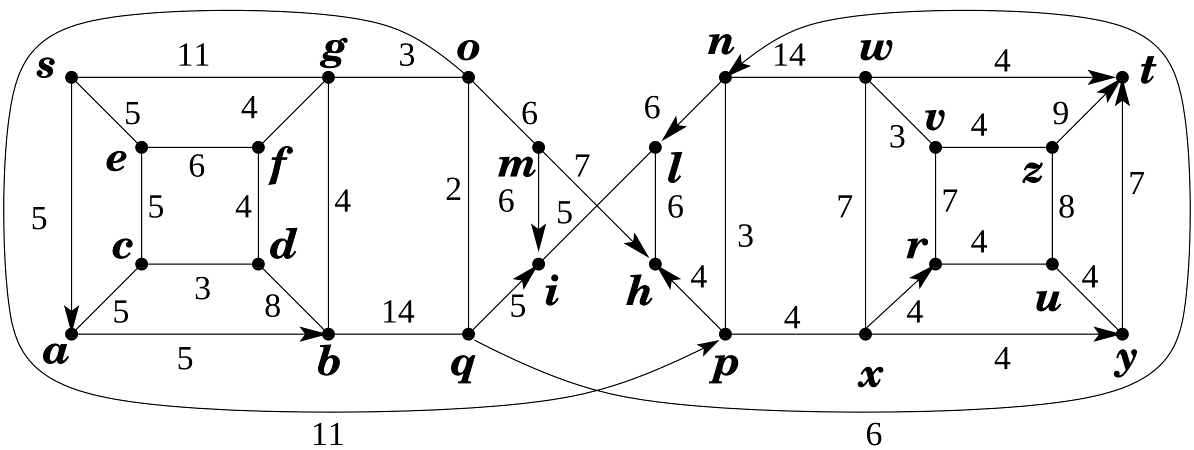
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
10	6	7	9	8	5	4	2	7	4	1	6	3	5	5	1	5	5	5	4	4	4	3	2	1	1
6	19	13	7	9	26	33	57	10	31	66	14	37	24	17	51	15	12	8	30	16	11	34	44	49	18
1	**2**	**2**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**5**	**7**	**5**	**6**	**6**	**6**	**7**	**6**	**5**	**3**	**7**	**7**	**5**	**8**	**9**	**10**	**8**
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	10	6, 7, 9, 10, 14, 24, 30, 34, 44, 49
decrescente	7	57, 37, 24, 17, 15, 12, 11
V-sequenza	11	57, 37, 24, 17, 15, 12, 8, 30, 34, 44, 49
crescente con 12	9	6, 7, 9, 10, 12, 16, 34, 44, 49

Ma come avrei dovuto organizzare invece i conteggi se mi fosse stato chiesto di individuare la più lunga A-sequenza? (Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre.)

Problema 5 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



5.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

5.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

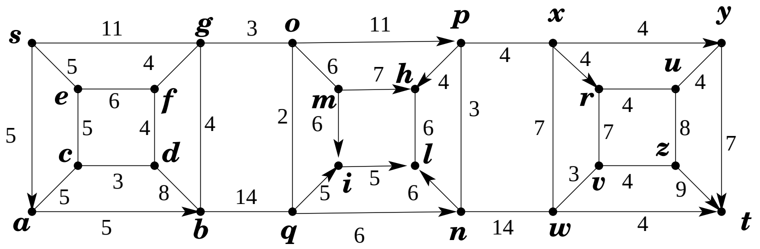
5.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

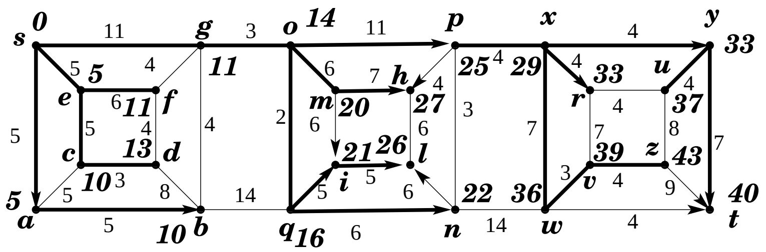
5.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

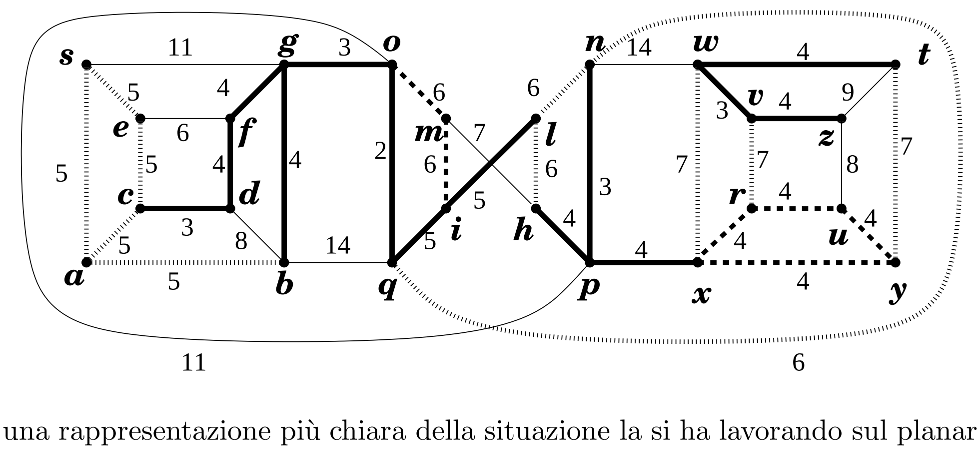
risposte.
Il grafo è planare: un suo planar embedding è fornito in figura.



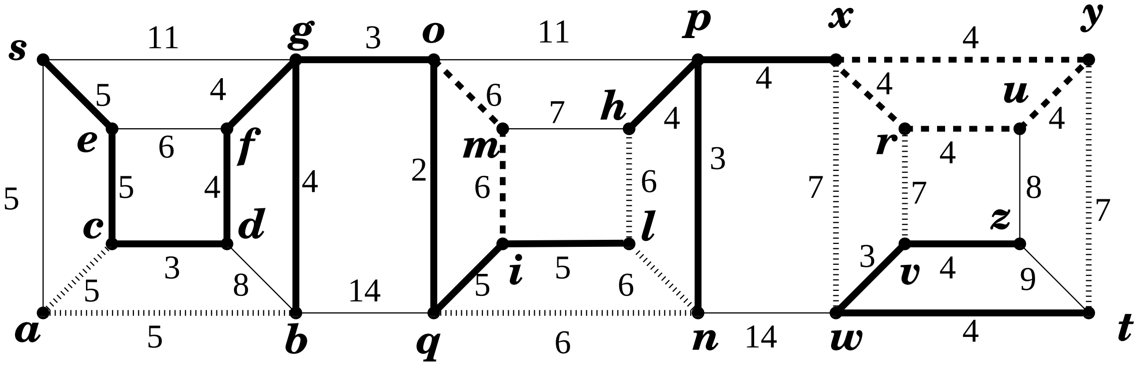
Un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo è riportato in figura.



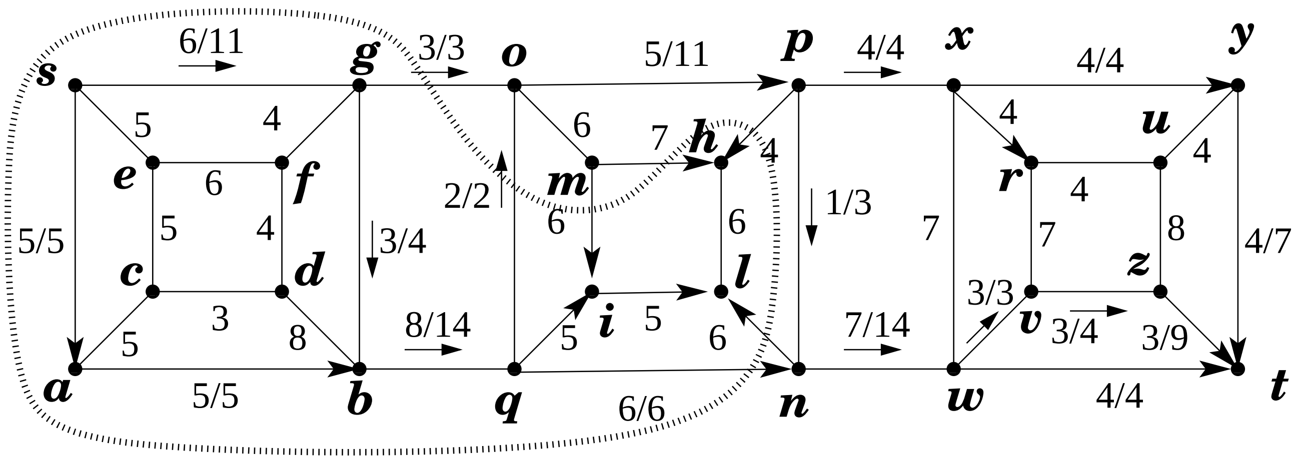
La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 = 216$ alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 14 archi in linea spessa, più uno qualsiasi dei 2 archi di peso 6 incidenti al nodo m (i 2 archi in linea tratteggiata), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 6 in linea sfumata spessa presenti nella zona centrale (gli archi qn, nl, lh), più uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più **3** qualsiasi dei 4 archi di peso 4 in linea sfumata spessa presenti nella zona a destra, più vi sono 7 modi ammissibili per scegliere 3 tra gli archi di peso 5 nella zona a sinistra: se non prendiamo l'arco ac allora dobbiamo prendere 3 qualsiasi tra i restanti 4 archi (4 modi), mentre se prendiamo l'arco ac allora sicuramente non prendiamo l'arco ab e dobbiamo ancora prendere 2 qualsiasi tra i restanti 3 archi (3 modi).



Ma una rappresentazione più chiara della situazione la si ha lavorando sul planar embedding.



La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 11 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 11 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

Problema 6 (6 punti):

Si consideri la soluzione $x_3 = x_6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 5$, $x_4 = 10$, $x_5 = 14$ del seguente problema.

$$\max\ x_1 + 6x_2 + C_3x_3 + 20x_4 + 10x_5 + C_6x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_3 + x_4 \leq 10 \\ x_5 + x_6 \leq 14 \\ x_1 + x_3 + x_5 \leq 20 \\ x_2 + x_4 + x_6 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.**(1pt)** Verificare esplicitamente che la soluzione proposta è ammissibile.

1.2.**(1pt)** Scrivere il problema duale.

1.3.**(1pt)** Impostare il sistema che esprima le condizioni agli scarti complementari.

1.4.**(1pt)** Risolvere il sistema per trovare una soluzione duale complementare alla soluzione primale fornita.

1.5.**(1pt)** Per quali valori dei parametri C_3 e C_6 la soluzione assegnata è ottima? Indica con chiarezza tutte le verifiche che sei stato chiamato a compiere.

svolgimento. Tutti i valori assegnati alle variabili sono non-negativi. Sostituendo tali valori negli ulteriori vincoli, conduciamo i seguenti controlli a verificare l'ammissibilità della soluzione proposta.

$$\begin{cases} (6) + (5) = 11 \leq 12 \\ (0) + (10) = \mathbf{10} \leq 10 \\ (14) + (0) = \mathbf{14} \leq 14 \\ (0) + (14) + (6) = \mathbf{20} \leq 20 \\ (10) + (0) + (5) = \mathbf{15} \leq 15 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente.

$$\min\ 12\,y_1 + 10\,y_2 + 14\,y_3 + 20\,y_4 + 15\,y_5$$
$$\begin{cases} y_1 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + y_5 \geq 6 \\ y_2 + y_4 \geq C_3 \\ y_2 + y_5 \geq 20 \\ y_3 + y_4 \geq 10 \\ y_3 + y_5 \geq C_6 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Dalle condizioni degli scarti complementari segue $y_1 = 0$ poichè il vincolo 1 del primale non è soddisfatto ad eguaglianza. Inoltre, poichè $x_1, x_2, x_4, x_5 > 0$, i vincoli 1,2,4 e 5 del duale dovranno essere soddisfatti ad eguaglianza e quindi otteniamo le segunti equazioni.

$$\begin{cases} + y_4 = 1 \\ + y_5 = 6 \\ y_2 + y_5 = 20 \\ y_3 + y_4 = 10 \end{cases}$$

Il duale ammette pertanto un'unica soluzione che soddisfa gli scarti complementari rispetto alla soluzione primale assegnata: $(0, 14, 9, 1, 6)$. Dobbiamo ora verificare se questa soluzione duale di base è ammissibile. È evidente che tutte le variabili assumono valore non negativo, ma dobbiamo anche andare a verificare i rimanenti vincoli del duale (i vincoli 3 e 6).

La soluzione primale assegnata sarà ottina se e solo se la soluzione duale ad essa complementare soddisfa tutti i vincoli, ed in particolare anche i vincoli 3 e 6, ossia se vale che $y_2 + y_4 = 15 \geq C_3$ (terzo vincolo) e $y_3 + y_5 = 15 \geq C_6$ (sesto vincolo). Possiamo concludere che la soluzione primale assegnata **è ottima se e solo se** $C_3 \leq 15$ e $C_6 \leq 15$.