Esame di Ricerca Operativa - 28 febbraio 2008
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Una fonderia produce un solo prodotto, ottenuto dalla fusione di 4 diversi materiali grezzi. La composizione di ciascun materiale, espressa in percentuale per kg di materiale, ed il costo unitario (Euro/kg) sono espressi nella seguente tabella:

	% alluminio	% silicio	% carbonio	costo al kg
materiale 1	3	9	6	680
materiale 2	5	11	5	750
materiale 3	1	2.5	14	450
materiale 4	4	5	7	870

Si tenga conto che il prodotto finale deve contenere una percentuale di alluminio compresa tra il 3% e 18%, una percentuale di silicio tra il 4% e il 5%, e una percentuale di carbonio non superiore al 5%. Formalizzare il problema di pianificare la produzione della fonderia con l'obiettivo di minimizzare i costi.

svolgimento.

Scegliendo come variabili decisionali

- x_1 = kg di materiale 1 presenti in ogni kg di prodotto,
- x_2 = kg di materiale 2 presenti in ogni kg di prodotto,
- x_3 = kg di materiale 3 presenti in ogni kg di prodotto,
- x_4 = kg di materiale 4 presenti in ogni kg di prodotto,

un possibile modello è il seguente:

$$\begin{array}{lrcll}
\min & 680\,x_1 + 750\,x_2 + 450\,x_3 + 870\,x_4 & & & \text{costo in materie prime per ogni kg di prodotto} \\
& 6\,x_1 + 5\,x_2 + 14\,x_3 + 7\,x_4 & \leq & 5 & \text{carbonio (sup)} \\
& 9\,x_1 + 11\,x_2 + 2.5\,x_3 + 5\,x_4 & \leq & 5 & \text{silicio (sup)} \\
& 9\,x_1 + 11\,x_2 + 2.5\,x_3 + 5\,x_4 & \geq & 4 & \text{silicio (inf)} \\
& 3\,x_1 + 5\,x_2 + \ x_3 + 4\,x_4 & \leq & 18 & \text{alluminio (sup)} \\
& 3\,x_1 + 5\,x_2 + \ x_3 + 4\,x_4 & \geq & 3 & \text{alluminio (inf)} \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 & \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	54	27	28	48	13	5	17	4	52	22	5	24	22	17	9	13	23	15	20
valore	69	20	15	32	12	6	16	5	30	28	4	22	21	20	11	13	20	12	10

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 29$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

risposte. I risultati finali sono i seguenti.

B	max val	peso	quali prendere
30	36=20+11+5	30=17+9+4	P,Q,H
25	28	22	L
29	34=28+6	27=22+5	L,F
21	25=20 +5	21=17+4	P,H

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

21	-13	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-15	1

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il primo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l' 11-esimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l' 8-esimo elemento (ossia l'ottavo elemento)?

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftarrow$
10	8	32	1	17	0	4	0	39	17	23	15	36	2	13	0	27	19	63	43	66	27	52	42	50	33	36
10	-2	24	-31	16	-32	4	-15	39	-22	6	-8	21	-34	11	-55	27	-8	44	-20	23	-39	25	-10	8	-17	3
32	22	24	0	16	0	28	24	39	0	19	13	21	0	22	11	66	39	47	3	23	0	25	0	8	0	3
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	66	27 (17^o elemento)	23 (21^o elemento)
include primo	32	10 (1^o elemento)	24 (3^o elemento)
include 11-esimo	36	39 (9^o elemento)	21 (13^o elemento)
include 8-esimo	28	4 (7^o elemento)	39 (9^o elemento)

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

20	13	15	10	14	28	35	59	13	32	60	16	39	26	51	53	17	14	10	32	55	21	36	46	18

4.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(2pt) Una sequenza è detta una A-sequenza se cresce fino ad un certo punto, e da lì in poi cala sempre. Trovare la più lunga A-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

svolgimento. Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

DECRESCENTE

⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	2	4	1	3	5	6	6	2	5	6	3	5	4	4	4	3	2	1	3	3	2	2	2	1
20	13	15	10	14	28	35	59	13	32	60	16	39	26	51	53	17	14	10	32	55	21	36	46	18
1	1	2	1	2	3	4	5	1	4	6	3	5	4	6	7	4	2	1	5	8	5	6	7	5
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

CRESCENTE

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	8	10, 14, 28, 32, 39, 51, 53, 55
decrescente	6	35, 32, 26, 17, 14, 10
A-sequenza	11	10, 14, 28, 35, 59, 60, 39, 26, 17, 14, 10

Problema 5 (15 punti):

Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

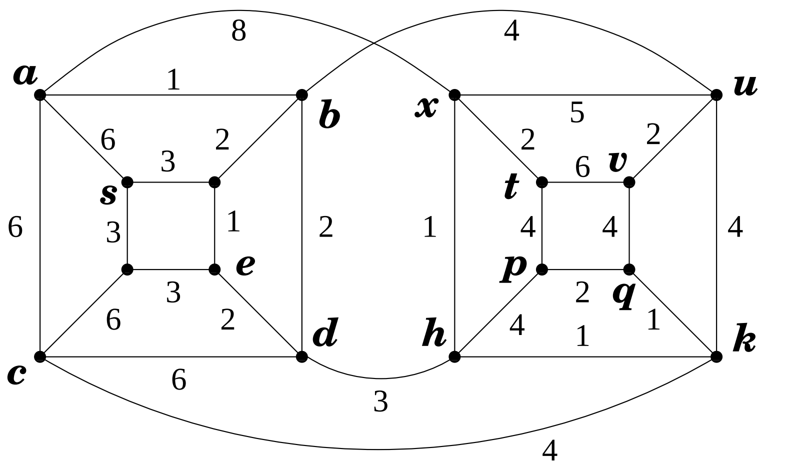
5.2.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

5.3.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.4.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.5.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

5.6.**(2pt)** Se il grafo è bipartito, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere bipartito. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo bipartito. (Fornendo non solo certificato di bipartizione per il grafo ottenuto ma anche argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

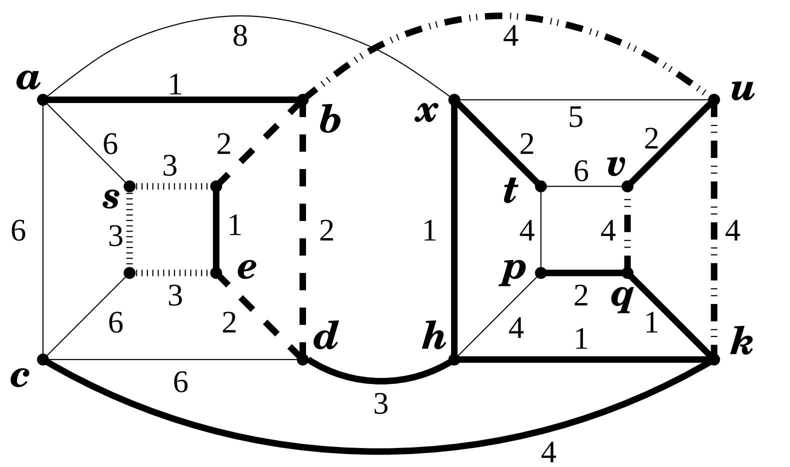


5.7.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

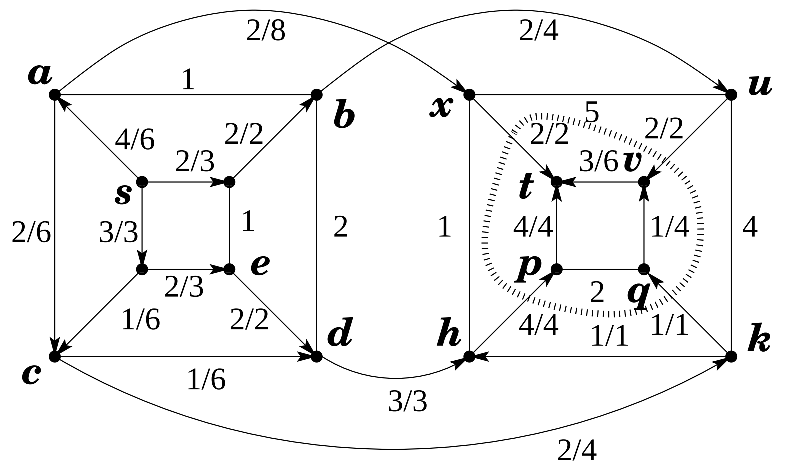
5.8.**(1pt)** Se il grafo è planare, aggiungere un arco in modo che esso cessi di essere planare. In caso contrario, dire quale è il minimo numero di archi la cui rimozione rende il grafo planare. (Fornendo certificato di planarità per il grafo ottenuto ed argomentando che la rimozione di un numero minore di archi non può bastare).

risposte.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 27 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 10 archi in linea spessa, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 2 ed in linea tratteggiata, più 2 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea sfumata spessa, più 1 qualsiasi dei 3 archi di peso 4 ed in linea tratto-punteggiata.

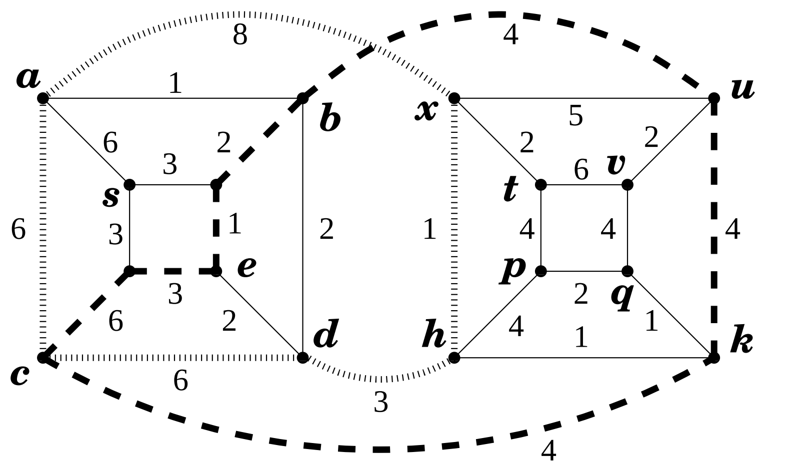


La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.

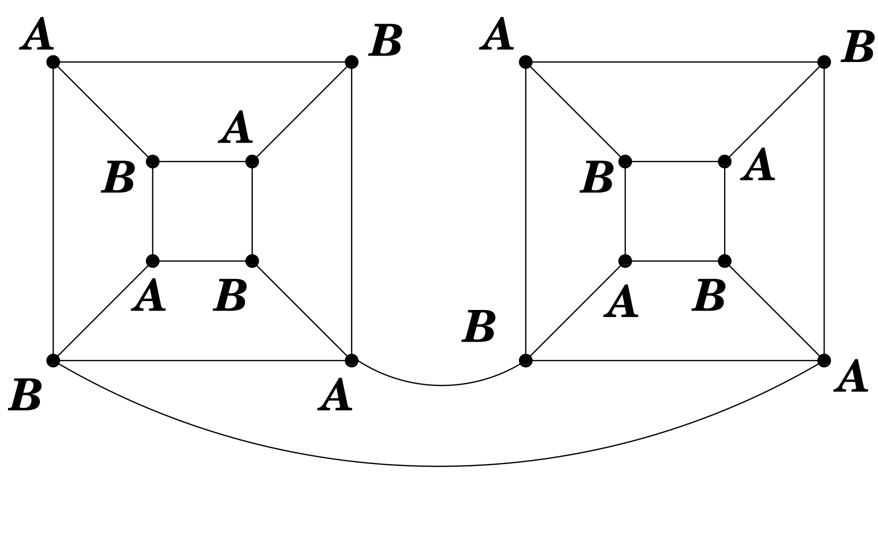


Il flusso ha valore 9 e satura l'insieme degli archi che attraversano la curva tratteggiata portandosi dal lato di s al lato di t. Questi 4 archi costituiscono pertanto un minimo s,t-taglio, anch'esso di valore 9 e che certifica pertanto l'ottimalità del flusso proposto.

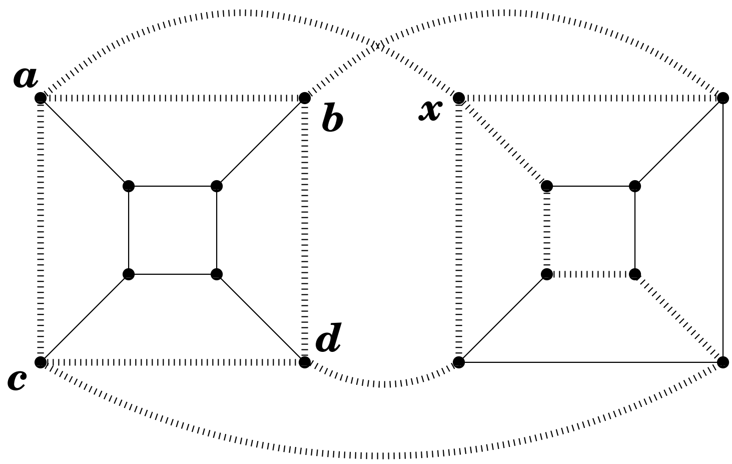
Il grafo non è bipartito poichè contiene circuiti dispari. Di fatto i due circuiti dispari esibiti in figura non hanno archi in comune e quindi devo rimuovere almeno 2 archi per rendere il grafo bipartito.



In effetti per rendere il grafo bipartito mi basta rimuovere i 2 archi ax e bu.



Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo la suddivisione di K_5 in figura.



Tuttavia la rimozione di un solo arco basta a rendere il grafo planare (e chiaramente 1 è il più piccolo numero intero maggiore di 0).