Esame di Ricerca Operativa - 29 gennaio 2008
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):

Una pasticceria artigianale produce tre tipi di torte (A, B e C) utilizzando i seguenti ingredienti: farina, uova, latte, zucchero e panna. In particolare, la panna, che può essere venduta anche separatamente, è prodotta con latte e zucchero dalla stessa pasticceria. In tabella sono riportate le quantità (in Kg) di ingredienti che devono essere impiegati per realizzare un Kg di torta di tipo A, B e C rispettivamente.

torta	farina	uova	latte	zucchero	panna
A	0.4	0.2	0.2	0.1	0.1
B	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
C	0.5	0.2	0.2	0.1	-

Per la produzione di un Kg di panna, sono utilizzati latte e zucchero nelle quantità riportate in tabella.

	latte	zucchero
panna	0.7	0.3

Per la prossima settimana devono essere prodotti almeno 20, 15 e 10 Kg di torte di tipo A, B e C rispettivamente, ed almeno 25 Kg di panna da vendere separatamente. In tabella, sono riportati i prezzi (euro/Kg) di vendita delle torte e della panna.

A	B	C	panna
7	5	8	3

Sapendo che in magazzino sono disponibili in totale 22 Kg di farina, 18 Kg di uova, 25 Kg di latte e 20 Kg di zucchero, formulare come problema di Programmazione Lineare il problema di massimizzare il profitto della pasticceria.

svolgimento.

Scegliendo come variabili decisionali

- x_A = numero di Kg di torta A,
- x_B = numero di Kg di torta B,
- x_C = numero di Kg di torta C,
- x_p = numero di Kg di panna venduta separatamente,

un possibile modello è il seguente:

$$
\begin{array}{llrl}
\max & 7\,x_A + 5\,x_B + 8\,x_C + 3\,x_p & & \text{ricavo totale} \\
& 0.4\,x_A + 0.4\,x_B + 0.5\,x_C & \leq 22 & \text{farina} \\
& 0.2\,x_A + 0.2\,x_B + 0.2\,x_C & \leq 18 & \text{uova} \\
& 0.27\,x_A + 0.24\,x_B + 0.2\,x_C + 0.7\,x_p & \leq 25 & \text{latte} \\
& 0.13\,x_A + 0.16\,x_B + 0.1\,x_C + 0.3\,x_p & \leq 20 & \text{zucchero} \\
& x_A & \geq 20 & \text{produzione minima tipo A} \\
& x_B & \geq 15 & \text{produzione minima tipo B} \\
& x_C & \geq 10 & \text{produzione minima tipo C} \\
& x_p & \geq 25 & \text{smercio minimo di panna}
\end{array}
$$

Problema 2 (4 punti):

Sia $B = 30$ la capacità del mio zaino. Si supponga di voler trasportare un sottoinsieme dei seguenti elementi a massima somma dei valori, soggetti al vincolo che la somma dei pesi non ecceda B.

nome	A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
peso	7	11	52	12	6	21	16	21	4	27	14	6	27	18	48	16	9	21	14
valore	9	12	50	12	4	20	16	22	3	28	12	5	27	20	47	14	8	18	12

2.1(1pt) quanto vale la somma massima dei valori di elementi trasportabili (con somma dei pesi al più $B = 30$)? Quali elementi devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso $B = 24$?

2.3 (1pt) e nel caso $B = 26$?

2.4 (1pt) e nel caso $B = 21$?

risposte. I risultati finali sono i seguenti.

B	max val	peso	quali prendere
30	23		A,B,D
24	26		A,B,N
26	29		A,P
21	21		A,U

Problema 3 (4 punti):

Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **massima**.

-5	15	-32	31	-16	12	-25	5	-9	12	-46	42	-21	34	-12	52	-27	8	-43	28	-21	9	-6	9	-8	11	-2

3.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

3.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

3.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

3.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il quarto elemento?

risposte. I risultati finali sono i seguenti.

	somma	dal	al
3.1	95	42 (12^o elemento)	52 (16^o elemento)
3.2	61	42 (12^o elemento)	28 (20^o elemento)
3.3	53	42 (12^o elemento)	-2 (27^o elemento)
3.4	59	31 (4^o elemento)	52 (16^o elemento)

Problema 4 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

32	25	29	23	27	41	48	72	26	44	73	29	52	39	64	66	30	28	23	45	67	34	49	58	32

4.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.2(2pt) una sequenza è detta una N-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga N-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

4.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 45. Specificare quanto è lunga e fornirla.

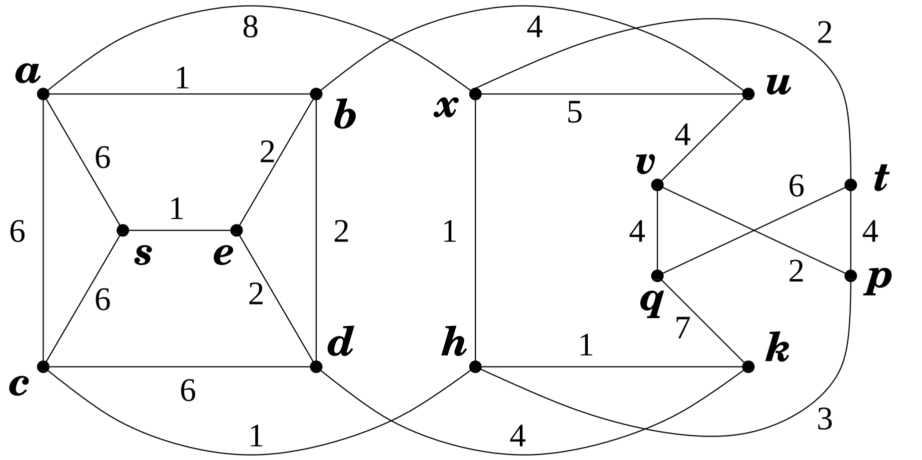
risposte. I risultati finali sono i seguenti.

	lunghezza	sottosequenza
4.1	6	48, 44, 39, 30, 28, 23
4.2	10	32, 29, 27, 26 — 73, 52, 39, 30, 28, 23
4.3	5	73, 66, 45, 34, 32

Problema 5 (16 punti):
Si consideri il grafo, con pesi sugli archi, riportato in figura.

5.1.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

5.2.**(2pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).



5.3.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

5.4.**(2pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.

5.5.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è bipartito oppure no.

5.6.**(2pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

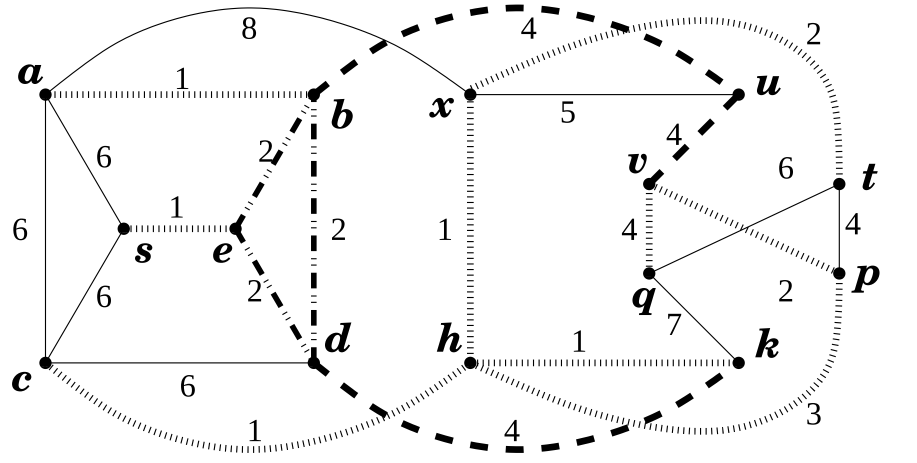
5.7.**(1pt)** Sia G' il grafo ottenuto dal grafo in figura con la rimozione dei seguenti 4 archi: ac, bd, uv, qk. Dire, certificandolo, se il grafo G' è bipartito oppure no.

5.8.**(1pt)** Fornire un matching di massima cardinalità nel grafo G' di cui al punto precedente.

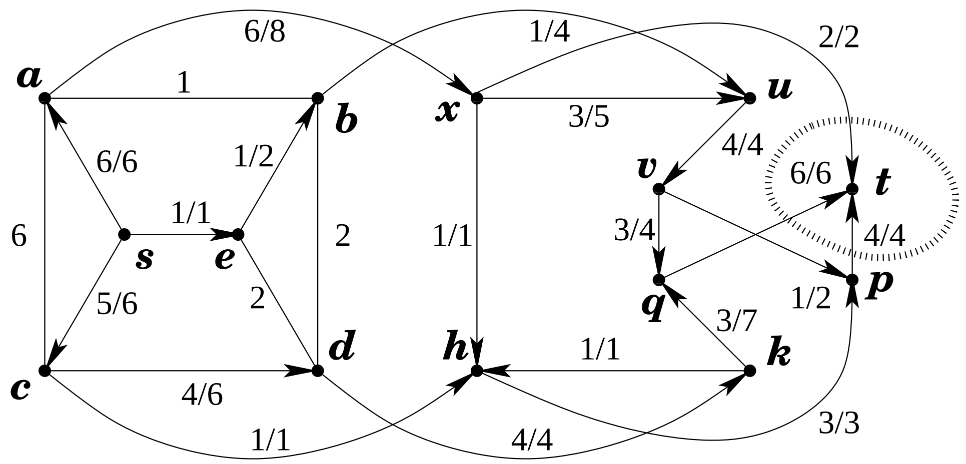
5.9.**(2pt)** Sia G'' il grafo ottenuto dal grafo in figura con l'aggiunta dell'arco bh. Dire, certificandolo, se il grafo G'' è planare oppure no.

risposte.

La seguente figura esprime la famiglia degli alberi ricoprenti di peso minimo. Ci sono 9 alberi ricoprenti di perso minimo e ciascuno di essi include i 9 archi in linea ombreggiata spessa, più 2 dei 3 archi di peso 2 ed in linea tratto-punteggiata, più 2 dei 3 archi di peso 4 ed in linea tratteggiata.



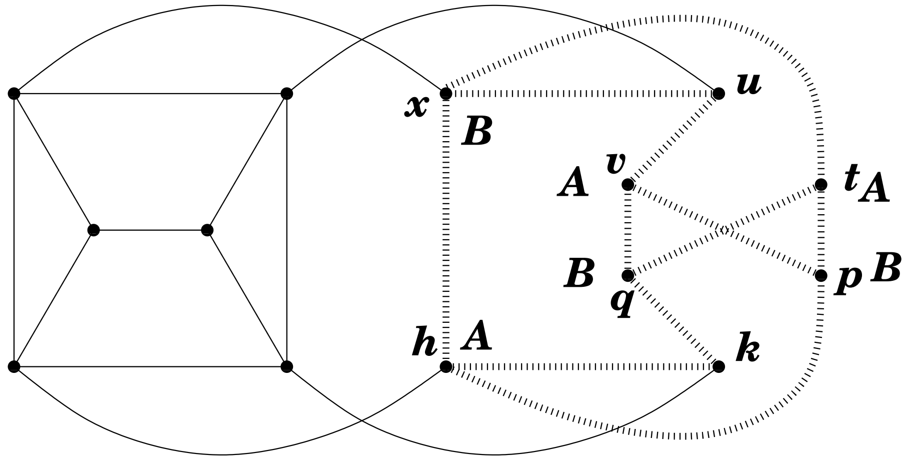
La seguente figura esibisce un flusso massimo (non esibisco tutti i passaggi che ho dovuto compiere per ottenerlo) ed un taglio (minimo) che ne dimostra l'ottimalità.



Il flusso ha valore 12 e satura l'insieme degli archi con un estremo in t, il che ne dimostra l'ottimalità. L'insieme degli archi con un estremo in t è pertanto un minimo s,t-taglio che certificare l'ottimalità del flusso proposto.

Il grafo non è bipartito poichè contiene circuiti dispari. Si consideri in particolare il circuito a, s, c, h, x che è presente anche in G', e pertanto nemmeno G' è bipartito.

Il fatto che G non sia planare può essere messo in evidenza esibendo il $K_{3,3}$ in figura. E se G non è planare nemmeno G'' potrè esserlo.



Infine, è facile constatare che G contiene un matching perfetto.