Esame di Ricerca Operativa - 29 marzo 2007
Facoltà di Architettura - Udine
- CORREZIONE -

Problema 1 (4 punti):
Sia $B = 30$. Trovare un sottoinsieme dei seguenti elementi la cui somma, soggetta al vincolo di non eccedere B, sia massima

$$13, 7, 4, 19, 52, 3, 26, 17, 13, 64, 28, 27, 19, 9, 48, 17$$

1.1(1pt) quale è il valore della somma massima? Quali elementi devo prendere?

1.2 (1pt) e nel caso $B = 25$?

1.3 (1pt) e nel caso $B = 18$?

1.4 (1pt) e nel caso $B = 26$?

Dapprima ordino i valori forniti in input ottenendo:

$$3, 4, 7, 9, 13, 13, 17, 17, 19, 19, 24, 25, 28, 48, 52, 64\,.$$

Poi mi sbarazzo degli ultimi 3 elementi visto che sono maggiori di 30. A questo punto compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

	decine	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
	unità	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
{ }		●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3}	ins 3	●	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3, 4}	ins 4	●	·	·	●	●	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 7	●	·	·	●	●	·	·	●	·	·	●	●	·	·	●	·
{···}	ins 9	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 13	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 13	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 17	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 17	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 19	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·
{···}	ins 19	●	·	·	●	●	·	·	●	·	●	●	●	●	●	●	·

	decine	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
	unità	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
{ }		·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3}	ins 3	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{3, 4}	ins 4	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 7	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 9	●	·	·	●	●	·	·	●	·	·	·	·	·	·	·
{···}	ins 13	●	●	·	●	●	·	●	●	●	●	●	●	·	●	·
{···}	ins 13	●	●	·	●	●	·	●	●	●	●	●	●	·	●	●
{···}	ins 17	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
{···}	ins 17	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
{···}	ins 19	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
{···}	ins 19	●	●	·	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

A questo punto scopro che $30 = 13 + 13 + 4$ è ottenibile. Invece, per $B = 25$, la miglior somma che posso ottenere è $24 = 13 + 7 + 4$. Infine, per $B = 18$, la miglior somma che posso ottenere è $17 = 13 + 4$.

B	max sum	quali prendere
30	30	13+13+4
25	25	13+9+3
18	17	13+4
26	26	13+9+4

Problema 2 (4 punti):
Nel seguente array di interi, trovare un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia massima.

3	-13	41	-31	16	-12	27	-5	9	-12	48	-46	21	-34	11	-55	27	-8	54	-30	23	-9	5	-10	8	-15	1

2.1(1pt) quale è il massimo valore di somma di un sottointervallo? Quale sottointervallo devo prendere?

2.2 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 19-esimo elemento?

2.3 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere l'ultimo elemento?

2.4 (1pt) e nel caso sia richiesto di includere il 15-esimo elemento?

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐
3	0	41	10	26	14	41	36	45	33	81	35	56	22	33	0	27	19	73	43	66	57	62	52	60	45	46
3	-13	41	-31	16	-32	41	-5	9	-12	48	-46	21	-34	11	-55	27	-8	54	-30	23	-9	5	-10	8	-15	1
65	62	75	34	65	49	81	40	45	36	48	0	21	0	29	18	73	46	54	0	23	0	5	0	8	0	1
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo intervallo	max sum	parte da	arriva a
qualsiasi	81	3	11
include 19-esimo	73	17	19
include ultimo	46	17	27
include 15-esimo	51	3	19

Problema 3 (4 punti):
Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

13	41	31	16	50	27	5	9	12	48	46	21	34	11	55	27	8	54	30	23	9	5	10	8	15

3.1(1pt) trovare una sottosequenza crescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.2(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

3.3(2pt) Una sequenza è detta una V-sequenza se cala fino ad un certo punto, e da lì in poi cresce sempre. Trovare la più lunga V-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

Dapprima compilo la seguente tabella di programmazione dinamica.

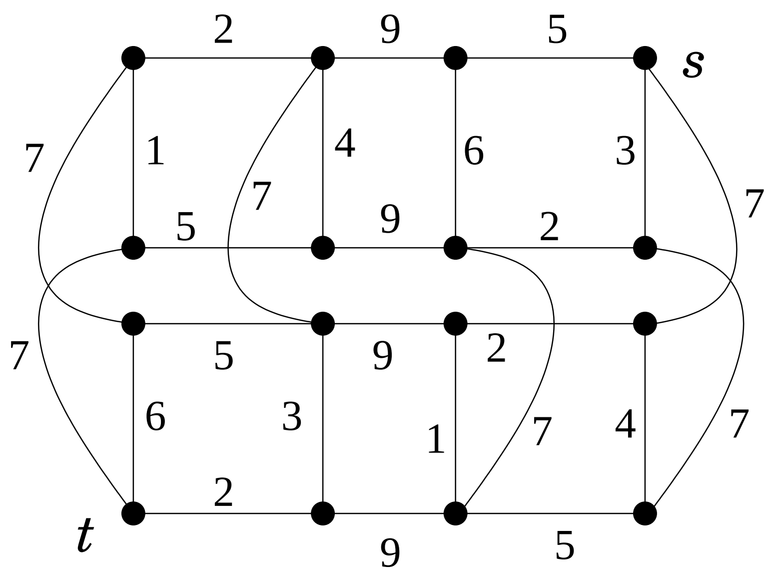
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒
5	3	3	4	2	3	6	5	4	2	2	3	2	2	1	2	4	1	1	1	3	3	2	2	1
13	41	31	16	50	27	5	9	12	48	46	21	34	11	55	27	8	54	30	23	9	5	10	8	15
1	1	2	3	1	3	4	4	4	2	3	4	4	5	1	5	6	2	5	6	7	8	7	8	7
⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐	⇐

Possiamo ora fornire le seguenti risposte.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
crescente	6	5, 9, 12, 21, 34, 55
decrescente	8	50, 48, 46, 34, 30, 23, 9, 5
V-sequenza	10	50, 48, 46, 34, 30, 23, 9, 5, 8, 15

Problema 4 (15 punti):
Si consideri il grafo in figura.
Con riferimento al grafo in figura, si affrontino i seguenti gruppi di esercizi.

Gruppo 4.1 (5 punti):



4.1.1(2pt) Trovare l'albero ricoprente di peso minimo.

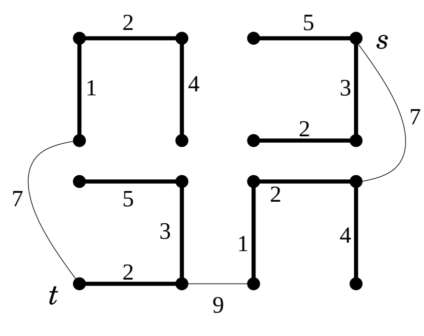
4.1.2(1pt) Indicare quali archi non siano contenuti in alcun albero ricoprente di peso minimo.

4.1.3(1pt) Indicare quali archi siano contenuti in ogni albero ricoprente di peso minimo.

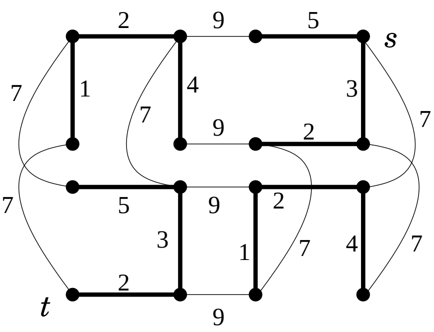
4.1.4(1pt) Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

risposte.

Un albero ricoprente di peso minimo, come reperito tramite l'algoritmo di Kruskal, è riportato nella seguente figura ed ha peso 57. Gli archi in grassetto sono quegli archi che appartengono ad ogni soluzione ottima, ossia quegli archi la cui rimozione conduce ad un aumento del costo dell'albero ricoprente di peso minimo.



Nella seguente figura vengono riportati tutti e soli quegli archi del grafo originario che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo. Gli archi contenuti in ogni soluzione ottima sono ancora rappresentati tramite linee molto spesse. Il peso complessivo degli archi contenuti in ogni soluzione ottima ammonta a 30.



Gli alberi di peso minimo sono $36 = 3^2 \cdot 4$ e ciascuno di essi può essere generato aggiungendo all'insieme degli archi presenti in ogni soluzione ottima (quelli in neretto) alcuni degli archi "opzionali" (quelli che appartengono ad un qualche albero ricoprente di peso minimo come riportati sopra) seguendo la seguente politica.

1. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 disposti a sinistra;
2. aggiungere uno qualsiasi dei 3 archi di peso 7 disposti a destra;
3. aggiungere uno qualsiasi dei 4 archi di peso 9.

Le 3 scelte di cui sopra sono indipendenti.

Gruppo 4.2 (4 punti):

4.2.1(1pt) Il grafo in figura ammette un ciclo Euleriano? Perchè? E quale è il minimo numero di archi la cui aggiunta mi consente di ottenere un ciclo Euleriano? Ammette un cammino Euleriano?

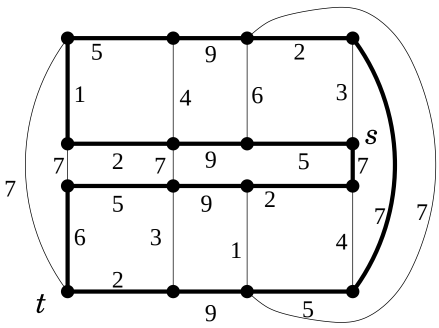
4.2.2(1pt) Il grafo in figura ammette un cammino Hamiltoniano? Fornire certificato.

4.2.3(1pt) Il grafo in figura è bipartito? Fornire certificato.

4.2.4(1pt) Il grafo in figura è planare? Fornire certificato.

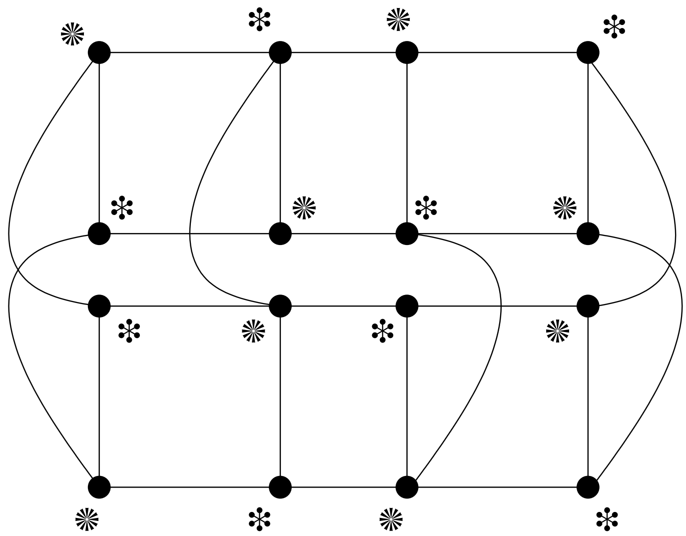
risposte.
Si noti che 12 dei 16 nodi del grafo hanno grado dispari. Ciò implica che il grafo non ammette cicli Euleriani ($12 > 0$) e nemmeno cammini Euleriani ($12 > 2$) e che occorre aggiungere almeno $12/2 = 6$ archi per rendere pari il grado di ogni nodo. In effetti è facile aggiungere 6 archi rendendo pari il grado di ogni nodo; a quel punto il grafo, che è ovviamente connesso, sarà anche Euleriano.

Il grafo assegnato è planare poichè i 4 incroci di archi possono essere entrambi risolti semplicemente flippando di 180^o rispetto al suo asse orrizzontale la parte di alto (oppure quella in basso) pervenendo alla rappresentezione planare dello stesso grafo riportata qui sotto.



Nella figura sopra gli archi in neretto costituiscono un ciclo Hamiltoniano.

Infine, il grafo è bipartito poichè ammette una bipartizione dei nodi come illustrata nella seguente figura. (Si osservi che nessun arco ha gli estremi labellati con lo stesso simbolo).



Gruppo 4.3 (6 punti):

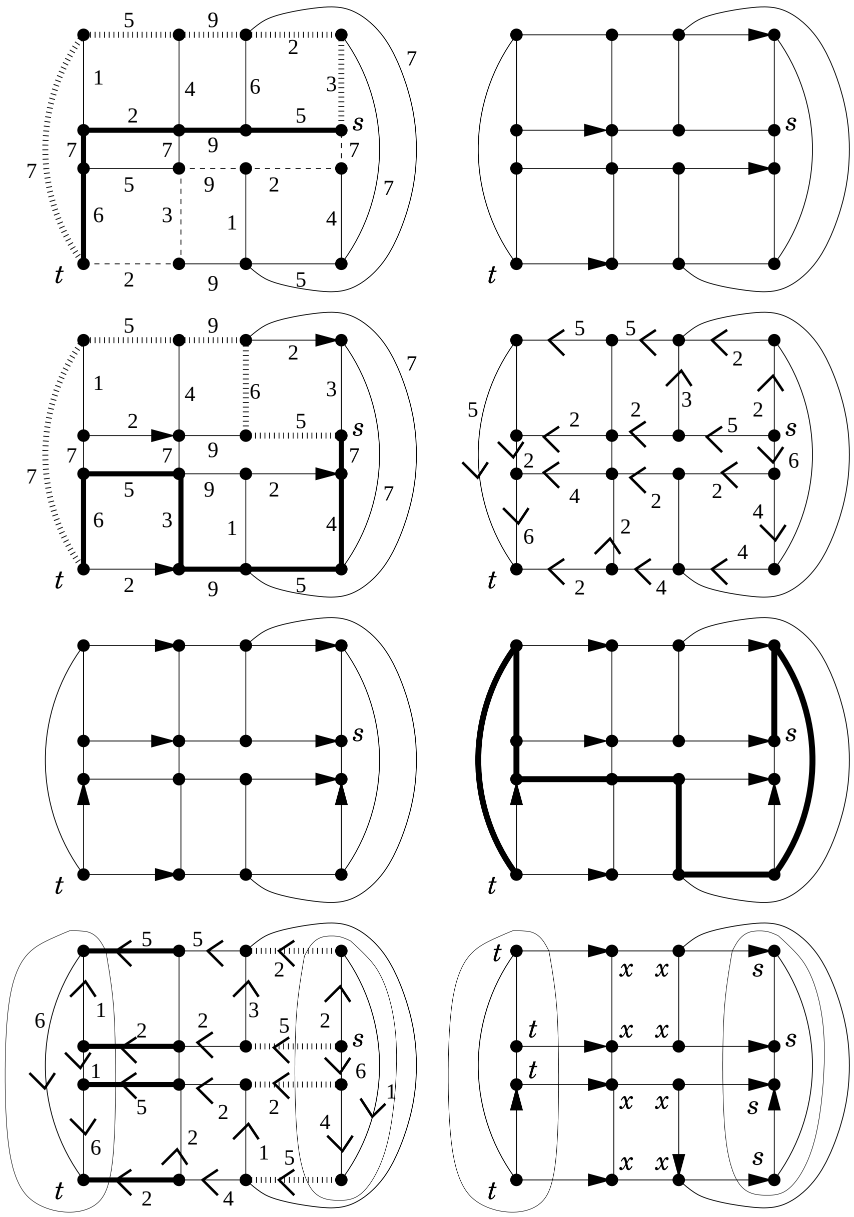
4.3.1(2pt) Trovare un flusso massimo dal nodo s al nodo t.

4.3.2(2pt) Fornire certificato di ottimalità.

4.3.3(2pt) Indicare per quali archi non sia possibile ridurre nemmeno di poco la capacità senza diminuire il valore del flusso massimo.

risposte.

Un appunto sui passi per la soluzione dell'esercizio è condensato in figura.



La figura offre 8 scorci organizzati in 4 righe (A,B,C,D) e 2 colonne. Inizialmente, poichè partiamo da un flusso vuoto, la rete ausiliaria associata coinciderà con il grafo in input. Pertanto, nello scorcio A1 abbiamo individuato 3 cammini aumentanti disgiunti e di lunghezza minima (5 archi ciascuno) direttamente nel grafo in input, visto come rete ausiliaria. Si noti che, per ciascuno di questi 3 cammini, la minima capacità di un arco del cammino vale 2, e pertanto possiamo instradare 2 unità di flusso su ciascuno di questi 3 cammini pervenendo ad un flusso di valore 6. In questa fase iniziale dell'algoritmo, i tre cammini aumentanti testè individuati possono essere immediatamente riguardati come una decomposizione di questo flusso di valore 6 diretto da s a t, ossia ben rappresentano tale flusso anche a livello grafico. Pertanto, per economia, lo scorcio A1 può ora essere riguardato anche come una descrizione del flusso corrente a seguito della prima iterazione dell'algoritmo. Nello scorcio A2 è riportata la rete ausiliaria associata a questo primo flusso. Nelle reti ausiliarie evitiamo di riportare i valori delle capacità residue (o di "ripensamento") e mettiamo solo in evidenza gli instradamenti percorribili. In pratica, visto che il grafo in input era non orientato, ogni rete ausiliaria che andremo a produrre sarà un'orientazione parziale del grafo in input: vengono introdotti dei sensi unici quando un arco è attualmente saturato (in direzione contraria). Una volta ricostruita la rete ausiliaria associata al flusso corrente diviene facile individuare una famiglia di cammini aumentanti disgiunti, come nello scorcio B1, dove sono evidenziati 2 cammini. Sul cammino rappresentato con archi in grassetto possiamo instradare al più 4 unità di flusso (lasciamo il computo delle capacità residue al lettore - basti confrontare, per ogni arco, il regime di flusso attuale contro le capacità iniziali, tenendo anche conto della direzione nella quale il cammino aumentante intende percorrere quell'arco e della direzione nella quale il flusso attuale lo impiegava) mentre sull'altro cammino possiamo instradare al più 2 unità di flusso. In particolare, sul cammino in grassetto possiamo instradare 4 unità di flusso nonostante esso contenga un arco di capacità solo 3 in quanto questo cammino da s a t porta a percorrere tale arco in direzione contraria a quella in cui il flusso corrente impiega lo stesso arco richiedendogli il trasporto di due unità di flusso, ma in direzione contraria. La situazione di flusso che viene a determinarsi avvalendosi di questi 2 cammini è rappresentata nello scorcio B2. Nello scorcio C1 trovi la rete ausiliaria associata a tale flusso. Nello scorcio C2 viene evidenziato un cammino aumentante. Lungo tale cammino resta possibile inviare una unità di flusso. La situazione di flusso che viene a determinarsi avvalendosi di questo cammini è rappresentata nello scorcio D1. Si ignorino per il momento le due curve chiuse riportate nello stesso scorcio nonchè il fatto che alcuni archi siano stati graficamente rappresentati in neretto o in tratteggio - questo servirà per considerazioni successive. Il flusso rappresentato nello scorcio D1 invia 13 unità di flusso dal nodo s al nodo t. Nello scorcio D2 trovi la rete ausiliaria associata a tale flusso. Si sono labellati con s tutti i nodi raggiungibili dal vero nodo s, e con t tutti i nodi da cui si possa raggiungere il vero nodo t. Si noti come, in questo caso, per ogni coppia di altri nodi (labellati con x) sia ancora possibile portarsi da uno all'altro nella rete ausiliaria. Le due curve chiuse abbracciano i nodi labellati s ed i nodi labellati t rispettivamente. Si noti come, anche tornando ora alla rappresentazione del flusso corrente nello scorcio D1, gli archi che attraversano tali curve costituiscano due tagli saturati dal flusso attuale. Quindi abbiamo 2 colli di bottigia (vista la considerazione sulla mutua connessione dei nodi labellati x, non vi sono altri colli di bottiglia). Un arco risulta critico, nel senso che non è possibile ridurne nemmeno di poco la capacità senza diminuire con questo il valore del flusso massimo, se e solo se appartiene ad un qualce collo di bottiglia (ricordo che nel gergo i colli di bottiglia sono chiamati tagli minimi). In questo caso, sia il massimo flusso che il minimo taglio valgono 14, ed abbiamo 8 archi critici.

Problema 6 (9 punti):

$$
\max\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3
$$
$$
\begin{cases}
x_1 \qquad + 4x_3 \leq 4 \\
3x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

6.1(3pt) Risolvere con il metodo del simplesso.

6.2(2pt) Se la funzione obiettivo è il profitto di un'attività, quanto saremmo disposti a pagare per incrementare di un'unità il termine noto del primo vincolo? E per il secondo vincolo?

6.3(2pt) E fino a dove saremmo disposti a pagare tale prezzo per il primo vincolo?

6.4(2pt) Di quanto dovremmo alterare il secondo coefficiente della funzione obiettivo affinchè la soluzione non sia più ottima?

6.1 Risoluzione con il metodo del simplesso:

Il problema è in forma canonica e pertanto gli corrisponde il primo dei seguenti tre tableau. Il problema è ad origine ammissibile e pertanto impiego il metodo del simplesso primale per giungere al tableau ottimo.

$$\begin{array}{rrrrr} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ w_1 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ w_2 & 3 & \boxed{1} & -1 & 12 \\ z & -8 & -6 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrr} & x_1 & w_2 & x_3 & \\ w_1 & 1 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ x_2 & 3 & 1 & -1 & 12 \\ z & 10 & 6 & -8 & 72 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrr} & x_1 & w_2 & w_1 & \\ x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\ z & 12 & 6 & 2 & 80 \end{array}$$

Pertanto la soluzione ottima è $x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$. Ad essa corrisponde un valore di 80 della funzione obiettivo.

6.2 I valori delle variabili duali (prezzi ombra) sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 6$. Pertanto:

per ogni unità di incremento nel termine noto del primo vincolo sono disposto a pagare massimo 2.

per ogni unità di incremento nel termine noto del secondo vincolo sono disposto a pagare massimo 6.

Si noti come una rapida verifica dell'ammissibilità delle soluzioni primale ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$) e duale ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$) consentirebbe a questo punto di assicurarsi della correttezza dei risultati fin qui prodotti.

6.3 Tuttavia le indicazioni fornite dai prezzi ombra (λ_1 e λ_2) valgono solo per piccoli incrementi. Per scoprire fino a quali entità di incremento tali valori ombra restano indicativi passiamo a considerare il duale. Il tableau del duale all'ottimo può essere ottenuto dal tableau primale all'ottimo come segue:

$$\overset{\text{Tableau Primale}}{\begin{array}{rrrrr} & x_1 & w_2 & w_1 & \\ x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 13 \\ z & 12 & 6 & 2 & 80 \end{array}} \Longleftrightarrow \overset{\text{Tableau Duale}}{\begin{array}{rrrr} & y_3 & y_2 & \\ y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\ \lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\ \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\ z & -1 & -13 & 80 \end{array}}$$

Assumiamo di incrementare di D la disponibilità nel primo vincolo. Il vantaggio nel considerare il duale è che l'unica riga ad essere influenzata da questa modifica nel problema è l'ultima. La nuova riga può essere prodotta attraverso opportune sostituzioni o avvalendosi della PROVA DI CONTROLLO (prova del nove) della PL.

$$
\begin{array}{rccc}
 & (0) & (0) & (0) \\
 & \downarrow & \downarrow & \\
 & y_3 & y_2 & \\
(0) \rightarrow y_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & 12 \\
(12) \rightarrow \lambda_2 & 0 & -1 & 6 \\
(4+D) \rightarrow \lambda_1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2 \\
z & -1 & -13 & 80
\end{array}
$$

Ricordiamo che per ogni colonna vale quanto segue: il valore dell'ultimo elemento della colonna si ottiene sommando gli altri elementi della colonna ciascuno moltiplicato per il coefficiente della riga cui appartiene e sottraendo infine il valore del coefficiente associato alla colonna.

Colonna 1: $-\frac{1}{4}(0) + 0(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -1 - \frac{D}{4}$
Colonna 2: $-\frac{13}{4}(0) - 1(12) - \frac{1}{4}(4+D) - (0) = -13 - \frac{D}{4}$
Colonna 3: $12(0) + 6(12) + 2(4+D) - (0) = 80 + 2D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$-1 - \frac{D}{4} \qquad -13 - \frac{D}{4} \qquad 80 + 2D$$

Si noti come, ponendo $D = 0$, si ritrovi in effetti la corrispondente riga z del tableau duale di cui sopra. Quindi abbiamo implicitamente condotto la prova di controllo relativamente a quel tableau. L'esito di tale verifica è stato positivo e quindi possiamo concludere sia per la correttezza dei singoli coefficienti dei tableau fin qui prodotti sia per la congruità con cui la prova di controllo è stata condotta.

Tornando al nostro obiettivo, dobbiamo individuare in quale intervallo per il parametro D i primi due termini della riga sopra computata rimangano tutti non positivi. La risposta è che tale condizione risulta rispettata nell'intervallo $D \geq -4$. Il tableau considerato resta pertanto ottimo se e solo se $D \geq -4$. Possiamo concludere che non vi è alcun limite al quantitativo di diponibilità sul primo vincolo che siamo disposti ad acquistare pagando 2 per ogni unità di incremento. Inoltre, in caso di liquidazione di tale disponibilità, il prezzo a cui vendere sarebbe 2 solo per le prime 4 unità vendute ma dovrebbe poi essere rivisto verso l'alto. Si noti tuttavia che la quantità disponibile nel problema di partenza era proprio 2, e quindi, per quel prezzo, siamo disposti ad arrivare fino ad esaurimento della quantità di risorsa disponibile (ma, anche ove fosse possibile, non risulterebbe conveniente andare in carenza di quella risorsa a quel prezzo).

6.4 Nel analizzare la sensitività della soluzione ottima rispetto a modifiche dei coefficienti della funzine obiettivo conviene invece riferirsi al primale.

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & (8) & (0) & (0) & (0) \\
 & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & x_1 & w_2 & w_1 & \\
(2) \rightarrow & x_3 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
(6+D) \rightarrow & x_2 & \frac{13}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\
 & z & 12 & 6 & 2 & 20
\end{array}
$$

Utilizzo nuovamente la regola di controllo
Colonna 1: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (8) = 12 + \frac{13}{4}D$
Colonna 2: $0(2) + 1(6 + D) - (0) = 6 + D$
Colonna 3: $\frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(6 + D) - (0) = 2 + \frac{1}{4}D$
Colonna 4: $\frac{1}{4}(2) + \frac{13}{4}(6 + D) - (0) = 20 + \frac{13}{4}D$

Pertanto la riga prodotta è:

$$12 + \frac{13}{4}D \quad 6 + D \quad 2 + \frac{1}{4}D \quad 20 + \frac{13}{4}D$$

L'intervallo dei valori di D per i quali il tableau indicato resta ottimo coincide con l'intervallo dei valori di D per i quali ciascuno dei primi tre termini della riga sopra computata rimane non negativo. Pertanto il tableau resta ottimo per ogni $D \geq -\frac{48}{13}$, ossia, la soluzione considerata ($x_1 = 0$, $x_2 = 13$, $x_3 = 1$.) resta ottima fintantochè $D \geq -\frac{48}{13}$.