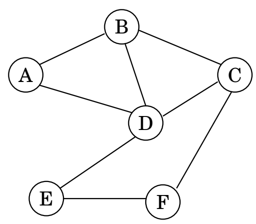
Esame di Ricerca Operativa - 24 febbraio 2010
Facoltà di Architettura - Udine

Problema 1 (2+2 punti): Dato un grafo $G = (V, E)$ ed un nodo $v \in V$, si indica con $N(v)$ il vicinato (neighborhood") di v in G, ossia l'insieme di quei nodi che distano 1 da v in G (ossia collegati a v da un arco). Con $N[v] := N(v) \cup \{v\}$ si è soliti indicare in vicinato chiuso di v. (Anche v è parte del proprio vicinato chiuso $N[v]$).

Un Dominating Set in un grafo $G = (V, E)$ è un insieme di nodi $X \subseteq V$ tale che ogni nodo di G è in X o quantomeno in $N(x)$ per un qualche $x \in X$.

Quando ad ogni nodo v è associato un costo w_v, allora il costo di $X \subseteq V$ è espresso da $val(X) := \sum_{v \in X} w_v$.

Ad esempio, con riferimento al grafo G in figura, gli insiemi $\{A, C, E\}$ e $\{B, F\}$ sono due possibili Insiemi Dominanti entrambi di valore 7.



	A	B	C	D	E	F
Valore	2	3	2	4	3	4

Nelle applicazioni siamo solitamente interessati a trovare Insiemi Dominanti di costo il minimo possibile.

Formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un Insieme Dominante di costo minimo nel grafo G in figura.

Mostrare come sia più in generale possibile formulare come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) la ricerca di un Insieme Dominante di costo minimo su un grafo $G = (V, E)$ generico.

Problema 2 (4 punti):

La tua azienda vende cesti di frutta. Questo Natale, la disponibilità di materie prime è la seguente: 650 kg di arance, 150 kg di noci, 280 kg di banane e 70 kg di datteri. Per motivi di trasporto, ogni cesto pesa 500 grammi, ma la linea affermatasi negli anni prevede 4 categorie di cesto:

cesto	composizione	profitto (euro/cesto)
Sicilia	solo arance	260
VIP	non piú del 50% di arance almeno il 10% di datteri almeno il 15% di banane	400
Africa	solo banane	510
Exclusive	almeno il 30% di banane almeno il 20% di datteri almeno il 30% di noci	520

Supponendo che ogni cesto confezionato venga venduto, formulare come PL il problema della massimizzazione del profitto. Indicare poi dove l'eventuale aggiunta di qualche vincolo di interezza possa lievemente aumentare la precisione del modello.

Problema 3 (4 punti):

Trovare, nel seguente array di interi, un sottointervallo di interi consecutivi la somma dei cui valori sia **MINIMA**.

-13	6	-20	15	-25	39	-32	22	-24	33	-16	28	-7	15	-25	20	-7	8	-21	25	-13	17	-8	6	-6	5	-7

tipo intervallo	min sum	parte da pos.	arriva a pos.	parte da val.	arriva a val.
qualsiasi					
include ultimo					
include 9^o					
include 5^o e 10^o					
include 17^o					
include 14^o e 16^o					

Problema 4 (4 punti):

Si consideri la seguente sequenza di numeri naturali.

41	39	37	42	38	22	15	1	39	18	0	35	12	24	7	5	34	36	42	18	3	30	13	11	32

5.1(1pt) trovare una sottosequenza decrescente che sia la più lunga possibile. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.2(1pt) una sequenza è detta una S-sequenza, o sequenza decrescente con un possibile ripensamento, se esiste un indice i tale cha ciascuno degli elementi della sequenza esclusi al più il primo e l'i-esimo sono strettamente minori dell'elemento che immediatamente li precede nella sequenza. Trovare la più lunga S-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.3(1pt) trovare la più lunga sottosequenza decrescente che includa l'elemento di valore 34. Specificare quanto è lunga e fornirla.

5.4(1pt) una sequenza è detta una A-sequenza se su una prima parte è crescente e poi sempre decrescente. Trovare la più lunga A-sequenza che sia una sottosequenza della sequenza data. Specificare quanto è lunga e fornirla.

tipo sottosequenza	max lung	sottosequenza ottima
decrescente		
S-sequenza		
decrescente con 34		
A-sequenza		

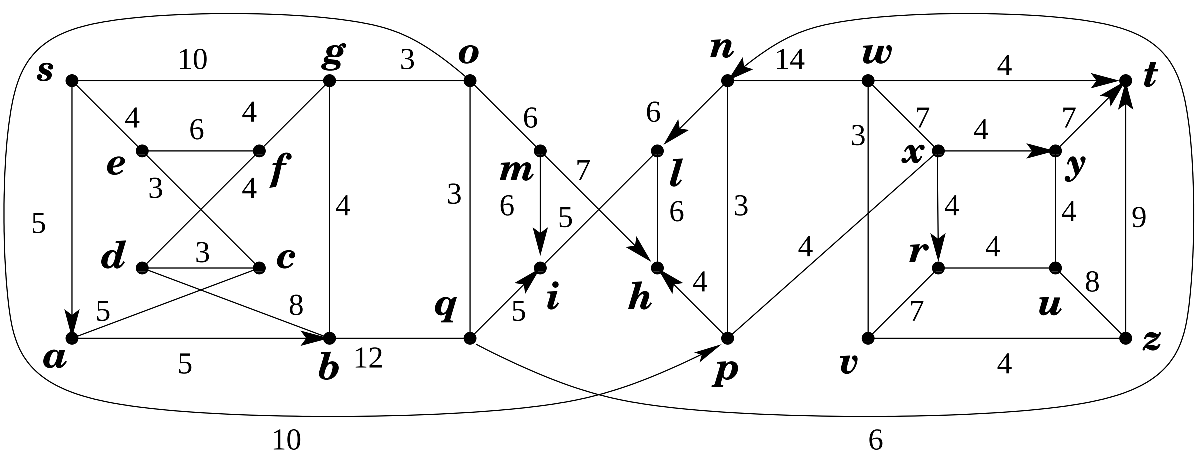
Problema 5 (4 punti):

5.1**(1+1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale sia illimitato. Ricevi un ulteriore punto se il primale ha il minor numero di variabili possibili.

5.2**(1pt)** Costruire un problema di PL il cui duale abbia infinite soluzioni ottime e precisamente 3 soluzioni ottime di base.

5.3**(1pt)** Costruire un problema di PL in cui l'unica soluzione ottima sia degenere.

Problema 6 (15 punti):
Si consideri il grafo G, con pesi sugli archi, riportato in figura.



6.1.**(1pt)** Dire, certificandolo, se il grafo è planare oppure no.

6.2.**(3pt)** Trovare un albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi del grafo.

6.3.**(2pt)** Trovare un albero ricoprente di peso minimo.

6.4.**(3pt)** Trovare tutti gli alberi ricoprenti di peso minimo. (Dire quanti sono e specificare con precisione come generarli).

6.5.**(3pt)** Trovare un massimo flusso dal nodo s al nodo t.

6.6.**(3pt)** Certificare l'ottimalità del flusso massimo dal nodo s al nodo t.