Cammini Ottimi

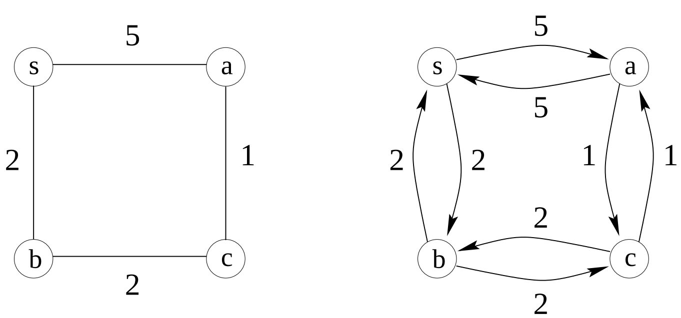
Problemi che richiedono di trovare il cammino di costo minimo fra una o più coppie di nodi di un grafo sono tra i più importanti nelle applicazioni pratiche. Vogliamo qui dare una panoramica introduttiva di sapore algoritmico e prettamente combinatorio.

Quando il costo di ogni arco è positivo

Dato un digrafo pesato D ed un nodo *sorgente* s di D vogliamo trovare per ogni nodo $v \in V(D) \setminus \{s\}$ un cammino che vada da s a v di costo minimo. (Il costo di un cammino è dato dalla somma dei pesi degli archi nel cammino).

Incominciamo con alcune facili osservazioni:

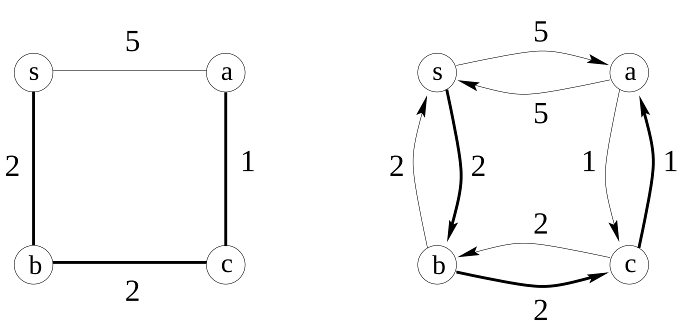
Fatto 1 *L' eventuale presenza di archi privi di orientamento (archi non diretti) non costituisce un problema: un arco non orientato uv può semplicemente venir sostituito dalle frecce $\vec{uv}$ e $\vec{vu}$ come illustrato in figura.*



Esercizio 2 *Sapresti esprimere il contenuto di tale osservazione in modo più rigoroso, magari formulando un lemma ed eventualmente dimostrandolo?*

Supponiamo di essere interessati a tutti i cammini minimi da s ad ogni altro nodo. Potrebbe sembrare che in generale si andranno ad utilizzare svariati archi del grafo in esame. Invece è sempre possibile limitarsi a $|V(D)| - 1$ archi:

Proprietà 3 *Sia $P_{s,v}$ un cammino minimo da s a v e sia u un qualsiasi nodo toccato da $P_{s,v}$. Allora il prefisso di $P_{s,v}$ che porta da s a u è un cammino minimo da s a u. Possiamo pertanto sempre individuare un'alborescenza dei cammini minimi come illustrato in figura.*



In virtù di questa osservazione ci è possibile ritornare la soluzione ottima in spazio $\mathcal{O}(|V(D)|)$. L'idea è la seguente: per ogni nodo v ritorno un padre $\pi(v)$ ossia il penultimo nodo in un qualche

Procedura 1 PATH (π, v)

while $s \neq v$
    produci l'arco $\pi(v)v$;
    $v \leftarrow \pi(v)$;

cammino ottimo da s a v. Gli archi del cammino ottimo da s a v sono quindi prodotti da una procedura PATH qui sopra espressa in pseudocodice.

Pesi Tutti unitari: Breath First Search

Dato un digrafo D ed un nodo *sorgente* s di D vogliamo trovare per ogni nodo $v \in V(D) \setminus \{s\}$ un cammino che vada da s a v utilizzando il minor numero possibile di archi. Ci stiamo cioè restringendo al caso di cardinalità, quando tutti i pesi sono unitari.

In questo caso abbiamo un'algoritmo molto efficiente (complessità $\mathcal{O}(|E|)$): la famigerata Breath First Search (BFS).

Algoritmo 2 BFS (D, c)

$\lambda(s) \leftarrow 0$; $\pi(s) \leftarrow s$;
$dist \leftarrow 0$;
repeat
    for each nodo v non etichettato ed adiacente ad un nodo etichettato con $\lambda = dist$
        $\lambda(v) \leftarrow dist + 1$;
    $dist \leftarrow dist + 1$;
until almeno un altro nodo è stato etichettato;

Esercizio 4 *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da s ad ogni nodo raggiungibile da s.*

Esercizio 5 *Come implementeresti l'algoritmo per ottenere la complessità $\mathcal{O}(|E|)$?*

Esercizio 6 *L'algoritmo BFS é stato descritto utilizzando del cosidetto* pseudocodice*. Sapresti cogliere e puntualizzare le differenze fondamentali tra una codifica ed una pseudocodifica?*

Pesi Tutti Positivi: l'algoritmo Dijkstra

Ritorniamo ora ad un caso più generale: quello pesato. Assumeremo tuttavia l'ipotesi semplificatrice che tutti i pesi siano non-negativi.

Nell'algoritmo che proponiamo le etichette che diamo ai nodi non sono sempre permanenti ossia ci riserviamo di trovare cammini migliori nel proseguio dell'algoritmo. Piú precisamente associamo un valore booleano $f(v)$ ad ogni nodo. Quando $f(v)$ é *Falso* é ancora possibile che $\lambda(v)$ diminuisca. Quando $f(v)$ é *Vero* il cammino ottimo da s a v è già stato trovato.

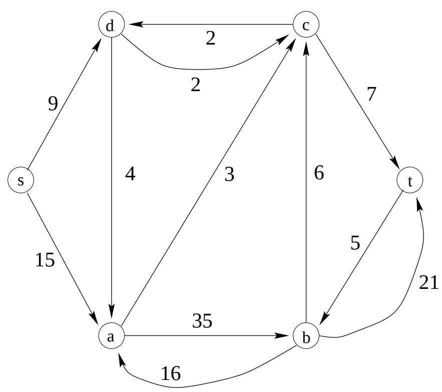
Algoritmo 3 Dijkstra (D, c)

for each nodo v di D **do**
  $\lambda(v) \leftarrow \infty$; $\pi(v) \leftarrow -1$; $f(v) \leftarrow False$;
$\lambda(s) \leftarrow 0$; $\pi(s) \leftarrow s$; $f(s) \leftarrow True$;
$\rho \leftarrow s$;
while $f(t) = Falso$;
  for each freccia $\vec{\rho v}$ di D with $f(v) = Falso$ **do**
    if $\lambda(\rho) + c(\vec{\rho v}) < \lambda(v)$ **then** $\lambda(v) \leftarrow \lambda(\rho) + c(\vec{\rho v})$; $\pi(v) \leftarrow \rho$;
  sia y un nodo tale che $\lambda(v) = \min\{\lambda(x) \ : f(x) = Falso\}$;
  $f(y) \leftarrow Vero$; $\rho \leftarrow y$;

Esercizio 7 *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da s ad ogni nodo raggiungibile da s.*

Esercizio 8 *Sapresti spiegare come mai non esista ancora alcuna implementazione dell'algoritmo Dijkstra con complessità $\mathcal{O}(|E|)$?*

Tracciamo il comportamento dell' *Algoritmo Dijkstra* nel seguente esempio.



s	a	b	c	d	t
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞
$\boxed{0}$	15	∞	∞	9	∞
$\boxed{0}$	15	∞	∞	$\boxed{9}$	∞
$\boxed{0}$	13	∞	11	$\boxed{9}$	∞
$\boxed{0}$	13	∞	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	∞
$\boxed{0}$	13	∞	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	18
$\boxed{0}$	$\boxed{13}$	∞	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	18
$\boxed{0}$	$\boxed{13}$	48	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	18
$\boxed{0}$	$\boxed{13}$	48	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$	$\boxed{18}$

Quando non ci sono cicli negativi

Quando siamo in presenza di archi di costo negativo il problema si complica notevolmente. Tanto è vero che se non poniamo restrizione alcuna il problema di trovare un cammino *semplice* (nessun arco ripetuto) ottimo diviene *NP*-completo in quanto contiene come caso particolare il problema del cammino amiltoniano. Se non richiediamo che il cammino sia semplice allora il problema diviene illimitato se e solo se siamo in presenza di cicli negativi. Si adotta pertanto la seguente:

Assunzione 9 *Il digrafo in esame non contiene alcun ciclo negativo (somma dei pesi degli archi negativa).*

In virtù di tale assunzione risulta poi inessenziale richiedere o meno che i cammini siano semplici dacché ogni cammino di peso minimo eviterá di sua sponte di ciclare.

Sottolineiamo ora una questione importante: la riduzione di cui al Fatto 1 non è più applicabile poichè un arco non orientato negativo darebbe automaticamente luogo ad un ciclo negativo. Pertanto ci limiteremo ai soli digrafi.

Assunzione 10 *Ogni arco del grafo in questione è una freccia.*

(In verità il problema di reperire i cammini minimi può essere risolto in tempo polinomiale, seppur con maggiori difficoltà, anche nel contesto di grafi ad archi non orientati e senza cicli negativi. Per fare ciò occorre utilizzare tecniche di matching.)

Ritornando invece al caso più semplice dei digrafi abbiamo l'algoritmo di Ford la cui complessità è $\mathcal{O}(mn)$.

Algoritmo 4 FORD (D, c)

---

for each nodo v di D **do**
    $\lambda(v) \leftarrow \infty$; $\pi(v) \leftarrow -1$;
$\lambda(s) \leftarrow 0$; $\pi(s) \leftarrow s$;
for $i \leftarrow 1$ **to** $|V(D)|$ **do**
    for each nodo v di D **do**
        $\eta \leftarrow \lambda(\rho) + c(\vec{\rho v}) = \min\{\lambda(u) + c(\vec{uv}) : u \in V(D)\}$;
        if $\eta < \lambda(v)$ **then** $\lambda(v) \leftarrow \eta$; $\pi(v) \leftarrow \rho$;

Esercizio 11 *Dimostrare come a terminazione sia stato trovato il cammino minimo da s ad ogni nodo raggiungibile da s.*

Suggerimento: Si dimostri per induzione che a completamento del ciclo a conteggio per $i = k$ la variabile $\lambda(v)$ esprime il minimo costo di un cammino da s a v in al più k archi.