Prova scritta di Matematica II - 17 luglio 2008 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(101, 100, 1)$, $(69, 68, 2)$ e $(1, 0, 3)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente le rette $R_1(t) = (1 - t, \pi, 1 + t)$ e $R_2(s) = (1 + s, 3\pi, 1 - s)$;

1.a.c. piano Π_3 ortogonale alla retta $R_1(t) = (1 - t, \pi, 1 + t)$ e passante per $(\pi, 0, 0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti abbiamo che $x - y = 1$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_1.

Tutti i punti di R_1 e tutti i punti di R_2 soddisfano alla condizione $x + z = 2$, ed è quindi questa l'equazione del piano Π_2.

Il vettore $(-1, 0, 1)$ esprime la direzione della retta R_1 ed è quindi ortogonale al piano Π_3. L'equazione del piano Π_3 è pertanto $(-1, 0, 1) \cdot (x, y, z) = (-1, 0, 1) \cdot (\pi, 0, 0)$ ossia $x - z = \pi$.

I piani Π_2 e Π_3 erano ortogonali per costruzione, e quindi l'annullamento del prodotto scalare $(-1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = 0$ vale a conferma. Il vettore $(1, -1, 0)$ ortogonale al piano Π_1 non è invece nè ortogonale nè parallelo a questi due vettori.

Π_1: $x - y = 1$	
Π_2: $x + z = 2$	Π_1 (G) Π_2 (H) Π_3 (G) Π_1
Π_3: $x - z = \pi$	1+1+1+2/30

1.b. Date le 3 rette:

$$R_1(t) : (t, \alpha\, t, t) \qquad R_2(t) : (2\, t, 3\, t, 2\, t) \qquad R_3(t) : (\alpha\, t, t, \beta\, t)\,.$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) le tre rette sono contenute in uno stesso piano;

2.) le rette R_1 e R_2 sono parallele;

3.) le rette R_1 e R_3 sono parallele.

Affinchè le 3 rette siano contenute in uno stesso piano è necessario che le loro direzioni $(1, \alpha, 1)$, $(2, 3, 2)$ e $(\alpha, 1, \beta)$ siano contenute in uno stesso piano. Tali vettori sono tutti contenuti in uno stesso piano se e solo se è nullo il volume del parallelepipedo che essi sottintendono, ossia ove si annulli il prodotto triplo:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 1 & \beta \end{matrix} \right\| = 3\beta + 2\alpha^2 + 2 - 3\alpha - 2 - 2\alpha\beta = (2\alpha - 3)(\alpha - \beta)\,.$$

Le direzioni delle 3 rette sono quindi coplanari solo quando $\alpha = \frac{3}{2}$ o quando $\alpha = \beta$. Si noti poi che tutte e tre le rette passano per uno stesso punto $(0, 0, 0)$ e pertanto le 3 rette sono coplanari precisamente quando le direzioni delle 3 rette sono coplanari.

Quando $\alpha = \frac{3}{2}$ le rette R_1 e R_2 sono parallele.

Il parallellismo tra R_1 e R_3 si ha per $\alpha = \beta = 1$ e per $\alpha = \beta = -1$.

1.) R_1, R_2, R_3 coplanari: $\alpha = \frac{3}{2}$ oppure $\alpha = \beta$
2.) R_1, R_2 parallele: quando $\alpha = \frac{3}{2}$
3.) R_1, R_3 parallele: $\alpha = \beta = 1$ oppure $\alpha = \beta = -1$
2+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R che contenga un diametro della sfera $x^2 - 6\,x + y^2 + z^2 = -8$ e sia parallela alla retta di equazione $R'(t) = (\pi + t, \sqrt{17}, \sqrt{3} + \pi\, t)$.

La direzione della retta R coincide con la direzione $(1, 0, \pi)$ della retta R'. Per catturare la retta R basterebbe quindi individuare un punto di passaggio. In effetti, sappiamo che R passa per il centro della sfera $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 1$, ossia per il punto $(3, 0, 0)$. L'equazione parametrica è quindi $R(t) = (3, 0, 0) + (1, 0, \pi)\, t = (3 + t, 0, \pi\, t)$.

$R(t) = (3 + t, 0, \pi\, t)\,.$
3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (3, 3, 1 + t)$ e la retta R_2 di equazioni $x + y + z = 1$ e $x - y = 0$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Si noti come ogni punto $(3, 3, 1 + t)$ di R_1 soddisfi all'equazione $x - y = 0$. Quindi le rette R_1 ed R_2 sono entrambe contenute nel piano $x + y + z = 1$ e quindi sono incidenti oppure parallele. Per vedere quale dei due casi occorra, proviamo a vedere se esista un qualche t per il quale $(3, 3, 1 + t)$ soddisfi anche all'equazione $x + y + z = 1$. Otteniamo cosí l'equazione $3 + 3 + (1 + t) = 1$ e quindi $t = -6$. Possiamo poi verificare, per scrupolo, che il punto $(3, 3, -5)$ appartiene ad entrambe le rette, prima di mettere un facile risultato in cassaforte.

$d(R_1, R_2) = 0\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono incidenti. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

$F(x, y) =$

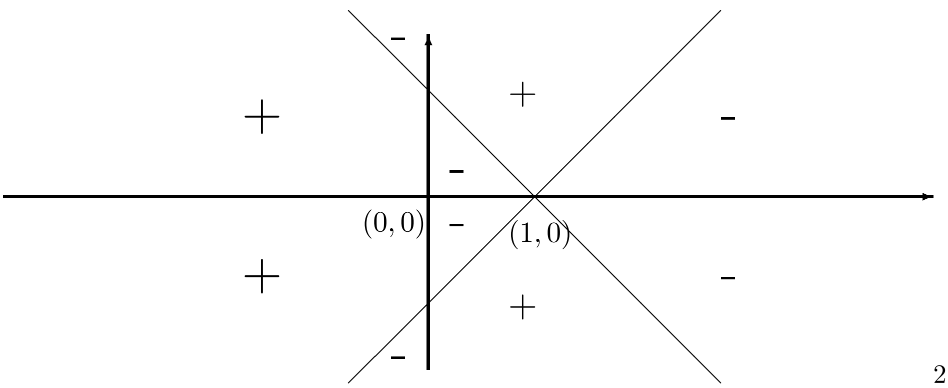
$$F(x, y) = \qquad x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2 \qquad \text{come data}$$

$$
\begin{array}{rcl}
= & x(y^2 - x^2 - 1 + 2\,x) & \text{raccogliamo la } x \\
= & x(y^2 - (x-1)^2) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
= & x\,(y - (x-1))(y + (x-1)) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\
= & x\,(y - x + 1)(y + x - 1)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}
$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x\,(y-x+1)(y+x-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(y-x+1)$ o $(y+x-1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 1 - x \vee y = -1 + x\,\}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 & = & 0 \\
2\,xy & = & 0\,,
\end{array}
\right.
$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $(0,\pm 1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,\pm 1)$ e $(1,0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$
\left[\begin{array}{cc} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -6\,x + 4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{array}\right]
$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3},0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\left[\begin{array}{cc} -6\,x+4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{array}\right]_{\left(\frac{1}{3},0\right)}\right) = Det\left(\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{array}\right]\right) = \frac{4}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{1}{3},0\right) > 0$ ne consegue che $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è punto di minimo locale. In effetti un tale minimo doveva essere presente nel triangolo delle Bermude evidenziato dallo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerato che $F(x,-y) = F(x,y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
PUNTI STAZIONARI: $(0,\pm 1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},0\right)$.
I punti $(0,\pm 1)$ e $(1,0)$ sono selle.
Il punto $\left(\frac{1}{3},0\right)$ è un minimo locale. 5/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$.

Poichè $F(0,0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0,0)\cdot(x-0) + F_y(0,0)\cdot(y-0) = -x$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:
$z = 0 + F_x(0,0)\cdot(x-0) + F_y(0,0)\cdot(y-0) = -x$
1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2+y^2-2\,x+1 \leq 9$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio $(x-1)^2+y^2 = 9$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ 2\,xy & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ (x-1)^2 + y^2 & = g(x,y) = & 9\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo che $y = 0$ (e quindi $x = 1 \pm 3$ dalla terza equazione) oppure che $\lambda = x$. Nel primo caso abbiamo messo in evidenza un massimo in $(-2,0)$ ed un minimo in $(4,0)$, ed entrambi i punti appaiono ben collocati guardando allo studio del segno e ricordando che la funzione è pari sulle y. Nel caso $\lambda = x$, la prima equazione si semplifica a $y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1$ (possiamo assumere $\lambda = x \neq 0$ poichè i punti stazionari sono già stati presi in esame separatamente), ed a questo punto possiamo eliminare facilmente la y combinando con la terza equazione. Otteniamo $6\,x^2 - 6\,x - 7 = 0$, da cui $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{51}}{6}$. Dalla terza equazione, per $x = \frac{3+\sqrt{51}}{6}$ otteniamo $y = \pm\sqrt{9 - \frac{9+6\sqrt{51}+51}{36}} = \pm\frac{\sqrt{264-6\sqrt{51}}}{6}$

cui dovranno corrispondere due punti di massimo. Dalla terza equazione, per $x = \frac{3-\sqrt{51}}{6}$ otteniamo $y = \pm\sqrt{9 - \frac{9-6\sqrt{51}+51}{36}} = \pm\frac{\sqrt{264+6\sqrt{51}}}{6}$ cui dovranno corrispondere due punti di minimo. Ricordiamoci anche del punto stazionario $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, che cade all'interno della regione e costituisce ancora un punto di minimo. Per determinare quali massimi siano locali e quali siano globali, dobbiamo osservare che $F(-2, 0) > F\left(\frac{3+\sqrt{51}}{6}, \pm\frac{\sqrt{264-6\sqrt{51}}}{6}\right)$.
Per determinare quali minimi siano locali e quali siano globali, dobbiamo osservare che $F(4, 0) < F\left(\frac{3-\sqrt{51}}{6}, \pm\frac{\sqrt{264+6\sqrt{51}}}{6}\right)$ e $F(4, 0) < F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

2.d)

1 Max Assoluto: $(-2, 0)$

2 Max Locali: $\left(\frac{3+\sqrt{51}}{6}, \pm\frac{\sqrt{264-6\sqrt{51}}}{6}\right)$

2 Min Locali: $\left(\frac{3-\sqrt{51}}{6}, \pm\frac{\sqrt{264+6\sqrt{51}}}{6}\right)$

1 Min Assoluto: $(4, 0)$

6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq \min\{x, 2R - x\}$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

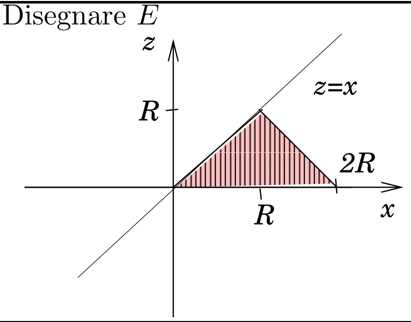
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

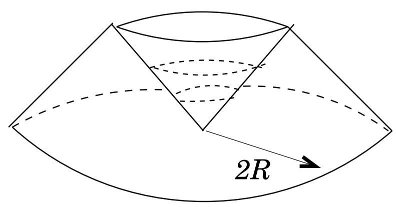
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0, 0)$, (R, R), e $(0, 2R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2+y^2}, 2R - \sqrt{x^2+y^2}\} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \min\{\rho, 2R - \rho\} \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_z^{2R-z} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^R \int_z^{2R-z} \rho \ d\rho\, dz\right) \\ &= 2\,\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2R-z} dz = 2\,\pi \int_0^R 2R^2 - 2Rz \ dz = 2\,\pi \ \left[2R^2 z - Rz^2\right]_0^R = 2\,\pi\, R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_z^{2R-z} \rho \ dz\, d\rho\, d\theta = 2\,\pi\, R^3$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_Q z\rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_z^{2R-z} z\rho \ dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^R z \int_z^{2R-z} \rho \ d\rho\, dz\right) \\ &= 2\,\pi \int_0^R z \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2R-z} dz = 2\,\pi \int_0^R 2R^2 z - 2Rz^2 \ dz = 2\,\pi \ \left[R^2 z^2 - \frac{2}{3} R z^3\right]_0^R = \frac{2}{3}\,\pi\, R^4\,. \end{aligned}$$

d)

$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_z^{2R-z} z\rho \ dz\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3}\,\pi\, R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{2}{3}\,\pi\, R^4}{2\,\pi\, R^3} = \frac{1}{3}\, R\,.$$

e) $x_b = 0$ $y_b = 0$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{3}\,R$

2/30