Prova scritta di Matematica II - 6 settembre 2007 - CORREZIONE Fila C

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 ortogonale al piano $4\,x - 3\,y = 0$ e contenente uno dei tre assi coordinati;

1.a.b. piano Π_2 costituito dai punti equidistanti da $(8, -6, 6)$ e $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alle sfere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ e $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 + z^2 \leq 25$ nel loro unico punto di contatto;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il vettore normale al piano Π_1 deve risultare ortogonale a $(4, -3, 0)$ ed è quindi della forma $(3, 4, c)$. Il piano Π_1, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), ha quindi equazione $3\,x+4\,y+c\,z = 0$. Pertanto $c = 0$ e l'asse contenuto è necessariamente quello delle z (caratterizzato dalle equazioni $x = 0$ e $y = 0$). In conclusione, Π_1 risulta caratterizzato dall'equazione $3\,x + 4\,y = 0$. $3\,x + 4\,y = 0$.

Il vettore $(8, -6, 6) - (0, 0, 0) = (8, -6, 6)$ risulta ortogonale al piano Π_2 che ha quindi equazione $4\,x-3\,y+3\,z = d$. Il valore di d risulta determinato dalla condizione di passaggio per il punto medio $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{-6+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (4, -3, 3)$, ossia $d = (4, -3, 3) \cdot (4, -3, 3) = 34$.

Le sfere hanno centro in $C_1 = (0, 0, 0)$ e $C_2 = (8, 6, 0)$ rispettivamente. Entrambe le sfere hanno raggio $\sqrt{25} = 5$ e quindi, se hanno un unico punto di contatto, questo dovrà coincidere con il punto medio del segmento $\overline{C_1C_2}$, ossia $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 3, 0)$. In effetti, dal teorema di Pitagora, e come da terna Pitagorica $3-4-5$, il punto $(4, 3, 0)$ dista 5 da entrambi i centri e resta così confermata la tangenza delle due sfere. Il piano Π_3 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(4, 3, 0)$ ed avrà equazione $(x, y, z)\cdot(4, 3, 0) = (4, 3, 0) \cdot (4, 3, 0)$ ossia $4\,x + 3\,y = 25$.

I piani Π_1 e Π_2 sono ortogonali, come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(3, 4, 0) \cdot (4, -3, 3) = 12 - 12 + 0 = 0$. Invece Π_3 è in relazione generica (nè ortogonale nè parallelo) sia con Π_1 che con Π_2. Vista l'ortogonalità tra Π_1 e Π_2, questa affermazione risulta verificata una volta verificato che Π_3 non è ortogonale nè a Π_1 nè a Π_2. In effetti, $(4, 3, 0) \cdot (3, 4, 0) = 24 \neq 0$ e $(4, 3, 0) \cdot (4, -3, 3) = 7 \neq 0$.

Π_1: $3\,x + 4\,y = 0$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $4\,x - 3\,y + 3\,z = 34$	
Π_3: $4\,x + 3\,y = 25$	1+1+1+2/30

1.b. Sono dati i tre versori

$$u = \frac{(0, 3 + \alpha, 4 + \alpha)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad v = \frac{(3 + \alpha, 4 + \alpha, 0)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}} \qquad w = \frac{(|4 + \alpha|, 0, |3 + \alpha|)}{\sqrt{2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25}}\,.$$

Determinare i valori di α per cui:

1. u risulta definito; w risulta definito;
2. u e v sono ortogonali; v e w sono ortogonali;
3. u e v sono paralleli; v e w sono paralleli;
4. $u \cdot v \wedge w$ è massimo; $u \cdot v \wedge w$ è minimo.

1.) u risulta definito: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$	w risulta definito: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
2.) u e v sono ortogonali: $\alpha \in \{-3, -4\}$	v e w sono ortogonali: $\alpha \in \{-3, -4\}$
3.) u e v sono paralleli: nessun α	v e w sono paralleli: nessun α
4.) $u \cdot v \wedge w$ è massimo: $\alpha = -4$	$u \cdot v \wedge w$ è minimo: $\alpha = -3$
	1+1+1+1/30

Infatti:

1. la divisione di un vettore per uno scalare risulta definita se e solo se lo scalare è diverso da zero e $2\,\alpha^2 + 14\,\alpha + 25 > 0$ per ogni α (rappresenta infatti la lunghezza di un vettore che non è mai identicamente nullo);
2. due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare vale zero;
3. due vettori sono paralleli se e solo se il loro prodotto vettoriale è il vettore nullo;
4. l'area del parallelepipedo di spigoli di lunghezza unitaria vale massimo 1; quando i 3 versori sono mutualmente ortogonali (cubo) ed il prodotto triplo vale $+1$ (come nel caso di $\alpha = -4$, quando il prodotto vettoriale di due versori presi nell'ordine ci riconsegna il terzo) oppure -1 (come nel caso di $\alpha = -3$, quando il prodotto vettoriale di due versori presi nell'ordine ci riconsegna l'opposto del terzo).

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $R_1(t) = (\sqrt{2},\, 2\,\pi\,t{+}3,\, 1{-}2\,\pi\,t)$ e $R_2(s) = (\sqrt{2}\,s,\, 3\,s{-}\pi,\, \pi{+}s)$ e determinare se esse siano sghembe, incidenti, o coplanari.

Poichè $R_1(-1/2) = (\sqrt{2},\, 3 - \pi,\, \pi + 1) = R_2(1)$, allora le due rette distinte sono incidenti e quindi la loro distanza è nulla.

$d(R_1, R_2) = 0\,.$
le rette R_1 e R_2 sono incidenti 2+1/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R di equazione $R(t) = (3 + t, 5 - t, 0)$ ed il piano Π di equazione $\frac{1}{\sqrt{3}}\,x + \frac{1}{\sqrt{3}}\,y + \frac{1}{\sqrt{3}}\,z = 3\,\sqrt{3}$ e determinare la relazione geometrica che sussiste tra R e Π.

Si noti che il vettore $(1, -1, 0)$, che di fatto esprime la direzione della retta R, è ortogonale al vettore normale al piano $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, poichè $(1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 1 + 0 = 0$. Quindi la retta è parallela al piano e per misurarne la distanza basterà misurare la distanza da Π

di un qualsiasi punto di R. Scegliamo il punto $R(-3) = (0, 8, 0)$ ed utilizziamo la formula per la distanza punto/piano

$$d((x_0, y_0, z_0), \{(x, y, z) \ : \ a\,x + b\,y + c\,z = d)\}) = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

che nel nostro caso, dove il vettore normale al piano $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ è di fatto un versore (ossia è già normalizzato), si riduce al computo del grado di violazione dell'equazione del piano

$$d((1, -1, 0), \Pi) = |a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 - d| = \left|\frac{8}{\sqrt{3}} - 3\sqrt{3}\right| = \left|\frac{8 - 9}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$d(R, \Pi) = d((0, 8, 0), \Pi) = |\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \cdot (0, 8, 0) - 3\sqrt{3}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$
la retta R ed il piano Π sono paralleli 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = 11\,xy + x^2(y + 6) - (x + 3\,y + 2)\,(y + 3)\,x$.

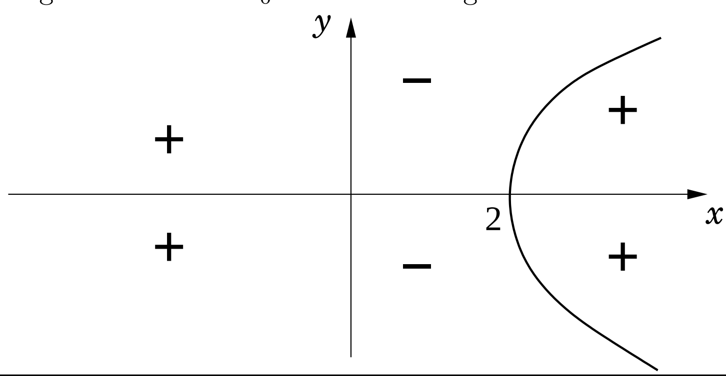
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x\,(11\,y + xy + 6\,x - 3\,y^2 - 9\,y - xy - 3\,x - 2\,y - 6) = x\,(3\,x - 3\,y^2 - 6) \\ &= 3\,x\,(x - y^2 - 2). \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = 3\,x\,(x - y^2 - 2)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x - y^2 - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = y^2 + 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 2 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = 3\,x\,(x-y^2-2)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial y} = 3\,(x-y^2-2)+3\,x = 3\,(2\,x-y^2-2)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial x} = -6\,xy$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x-y^2-2 &= 0 \\ xy &= 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che almeno uno tra x ed y deve esere nullo. Nel caso $y=0$, dalla prima equazione segue $x=1$. Nel caso $x=0$, la seconda equazione si rivela invece impossibile. Quindi il solo punto stazionario è il punto $(1,0)$, dove $F(1,0)=-3$. Poichè $F(1,1)=-6$ e $F(3,0)=9$, allora, essendo la F in $\mathbf{C}^\infty$ e con un solo punto stazionario, il punto $(1,0)$ non può essere un estremo nemmeno in senso locale, ed è quindi punto di sella. Ciò poteva essere suffragato con l'analisi delle derivate seconde (vedi a pag.224 del testo). Siamo quindi chiamati ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $(1,0)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} 6 & -6\,y \\ -6\,y & -6\,x \end{bmatrix}_{(1,0)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}\right) = -36$$

è negativo. Risulta confermato che $(1,0)$ è un punto di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
1 PUNTO STAZIONARIO: $(1,0)$.
Il punto stazionario $(1,0)$ è punto di sella. 3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i=0,1,2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i,0,F(i,0))$;

Chiaramente, il punto $(i,0,F(i,0))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Prima di procedere tramite fredde formule conviene, come sempre, farsi un quadro di cosa ci si debba attendere. Poichè $(1,0)$ è punto stazionario, ci attendiamo che il piano tangente Π_1 sia ivi orrizzontale e quindi descritto dall'equazione $z=F(1,0)=-3$. Dallo studio del segno della F, la conformazione stessa di Σ_0 ci suggerisce che anche nei punti $(0,0)$ e $(2,0)$ il piano tangente non possa essere inclinato lungo l'asse delle y, ossia $F_y(i,0) := \frac{\partial F}{\partial y}(i,0) = -6\,xy\|_{(i,0)} = 0$. Un'ulteriore conferma di ció viene dall'osservare la simmetria $F(x,-y)=F(x,y)$. L'equazione del piano tangente (testo, pag. 192) si riduce pertanto a

$$z = z_0 + F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0)\,,$$

ossia a $z = F(i,0) + F_x(i,0)\,(x-i)$. Ricordando ora che $F = 3\,x\,(x - y^2 - 2)$ e $F_x = 3\,(2\,x - y^2 - 2)$, per Π_0 otteniamo l'equazione $z = -6\,x$ e per Π_2 otteniamo l'equazione $z = -12 + 6\,x$.

Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = -6\,x$ Π_1: $z = -3$ Π_2: $z = -12 + 6\,x$

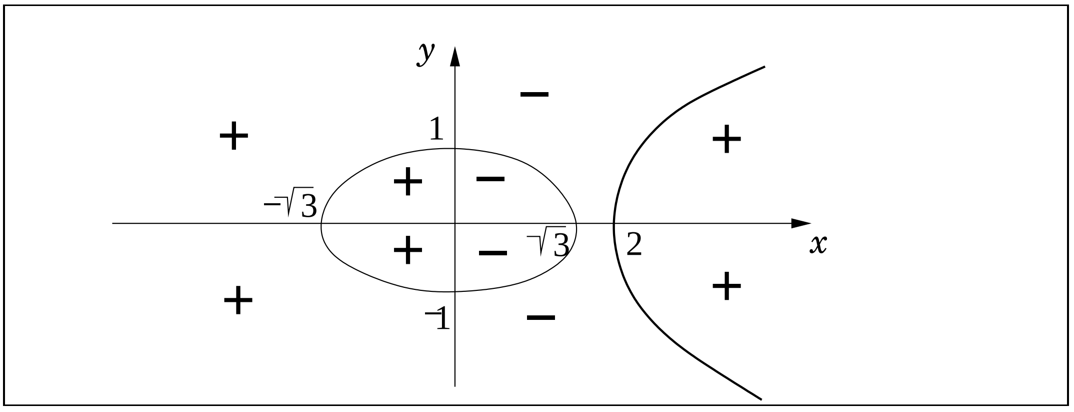
1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 3\,y^2 \leq 3\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è limitata e chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R. Entra quindi in campo la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange. Impostiamo quindi il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + 3\,y^2$ e $g_x = 2\,x$ e $g_y = 6\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 3\,(2\,x - y^2 - 2) & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,x \\ -6\,xy & = F_y = \lambda g_y & = & 6\,\lambda\,y \\ x^2 + 3\,y^2 & = g(x,y) & = & 3\,. \end{cases}$$

Nel districarsi tra queste equazione potrà sicuramente risultare d'aiuto, o quantomeno di conforto, l'essere consapevoli della simmetria per ribaltamento dell'asse delle y goduta sia da R che dalla F. Tale simmetria determinerà la geometria delle soluzioni da estrarsi. Inoltre, sempre per ambientare lo studio, converrà tracciare qualche schizzo, come ad esempio riportare la regione R sullo studio del segno.



La prima equazione conduce ad indagare separatamente i casi $y = 0$ (che significa sbarazzarsi di una variabile) e $y \neq 0$ (che conduce appunto ad una semplificazione nella seconda equazione).

Procedendo sotto l'assunzione $y \neq 0$, la seconda equazione si semplifica in $x = -\lambda$ che, sostituita nella prima equazione considerando anche $y^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2$ (dalla terza equazione), conduce ad un'equazione di secondo grado nella sola x:

$$x^2 + 2\,x - 3 = 0\,,$$

con radici $x_1 = -3$ e $x_2 = 1$. Per ciascuna di esse, $y^2 = 1 - \frac{1}{3}x^2$ segue dalla terza equazione e quindi, come da simmetria rispetto al ribaltamento dell'asse delle y, alla radice x_1 corrispondono i punti $(-3, \pm\sqrt{-2})$ mentre alla radice x_2 corrispondono i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. I punti $(-3, \pm\sqrt{-2})$ presentano coordinate immaginarie, e quindi possiamo ignorarli. Risultano invece di pertinenza i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ con $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5$.

Il caso $y = 0$ risulta quindi di sicura importanza (quantomeno per stanare i massimi); e, a dire il vero, la rilevanza di questo caso risultava già evidente considerata la simmetria per ribaltamento dell'asse delle y menzionata sopra. Assumendo $y = 0$, dalla terza equazione otteniamo due soli punti: $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Quì, $F(\sqrt{3}, 0) = -3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$ e $F(-\sqrt{3}, 0) = 3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ e quindi $(-\sqrt{3}, 0)$ risulta essere il punto di massimo assoluto ricercato. Anche i punti $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ possono ora essere confermati come punti di minimo assoluto su R visto che $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5 < F(\sqrt{3}, 0)$. Per indagare la natura di $(\sqrt{3}, 0)$ occorre ricordare che il gradiente della F è disteso orrizzontalmente lungo tutti i punti dell'asse delle x e diviene quindi pertinente esaminare il segno di $F_x(\sqrt{3}, 0) = 3\,(2\sqrt{3} - 2) > 0$. Risulta ora evidente che $(\sqrt{3}, 0)$ rappresenta un punto di massimo relativo.

2.d)

1 Max Assoluto: $(-\sqrt{3}, 0)$; $F(-\sqrt{3}, 0) = 3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$

2 Min Assoluti: $\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$; $F\left(1, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -5$

1 Max Relativo: $(\sqrt{3}, 0)$; $F(\sqrt{3}, 0) = -3\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$

6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x, y) := \sqrt{3\,x\,(x - y^2 - 2)}$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x\,(x - y^2 - 2) \geq 0\,\right\}$$

1/30

2.f. Determinare tutti i punti estremali di $h(x, y) = \sqrt{3\,x\,(x - y^2 - 2)}$ nella regione $R \cap D[h]$.

Poichè $h(x, y) = \sqrt{F(x, y)}$, e considerato che la funzione $\sqrt{\cdot}$ è monotona crescente, possiamo allora avvalerci dell'analogo studio per la funzione F. Si giunge alle seguenti conclusioni.

2.f)

1 Max Assoluto: $(-\sqrt{3},0)$; $h(-\sqrt{3},0)=\sqrt{3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}$

Infiniti Min Assoluti: $(0,x),\ -1\le x\le 1$; $F(0,x)=0$

1/30

3. In un riferimento Cartesiano x,y,z sia E la parte del piano $y=0$ descritta dalle disequazioni $|z|\le|x|\le R$, e sia M il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z. Sia S la sfera di centro l'origine e raggio R e sia S_{sup} la semisfera ottenuta intersecando S con il semispazio $z\ge 0$. Sia $Q_{sup}=M\cap S_{sup}$ e sia Q_{inf} l'intersezione tra M ed il semispazio $z\le 0$. Infine, sia $Q=Q_{sup}\cup Q_{inf}$.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che M (sulla destra);

3.b. Esprimere M e Q_{inf} in coordinate cilindriche;

3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e Q_{sup} in coordinate sferiche;

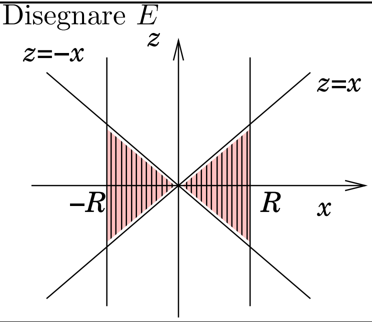
3.d. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.e. Calcolare l'integrale triplo $I=\int_Q z\ dx\,dy\,dz$;

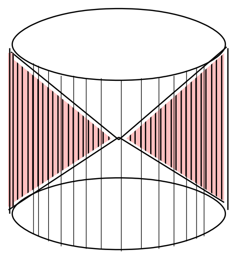
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B=(x_b,y_b,z_b)$ di Q;

La figura piana E è l'intersezione tra la striscia verticale $|x|\le R$ e la farfalla $|z|\le|x|$. Rimandiamo alla correzione del tema del 28 settembre 2006 per maggiori dettagli su E ed M.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare M



1/30

b) M **e** Q_{inf} **in coordinate cilindriche**

$$M=\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ |z|\le\rho\le R\}$$

$$Q_{inf}=\{(\rho,\theta,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le -z\le\rho\le R\}$$

1+1/30

c) Q **in coordinate Cartesiane e** Q_{sup} **in coordinate sferiche**

$$Q=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z^2\le x^2+y^2\le R^2,\ z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$$

$$Q_{sup}=\{(\rho,\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3\ :\ 0\le\rho\le R,\ \tfrac{\pi}{4}\le\phi\le\tfrac{\pi}{2}\}$$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q, conviene scomporre Q in Q_{sup} e Q_{inf} con l'intento di lavorare in coordinate sferiche sul primo e cilindriche sul secondo al fine di sfruttare al meglio le simmetrie in gioco.

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\int\int_{Q_{inf}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\rho}^0 \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^2 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \; d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \int_{-\rho}^0 dz\, d\rho \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \int_0^R \rho^2 \; d\rho \\
&= \frac{2}{3}\,\pi\, R^3\, \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^R = \frac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\, R^3 \,.
\end{aligned}$$

d) $V = \int_{Q_{sup}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_{Q_{inf}} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\, R^3$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned}
I &= \int\int\int_{Q_{sup}} \rho\cos\phi\rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int\int\int_{Q_{inf}} z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \frac{\sin 2\,\phi}{2} \; d\phi\, d\rho\, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{-\rho}^0 z\cdot\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \; d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\,\phi}{2} \; d\phi + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \int_{-\rho}^0 z \; dz\, d\rho \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\,\phi}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\,\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \rho^3 \; d\rho \\
&= \frac{1}{2}\,\pi\, R^4\, \frac{1}{4} - \pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = -\frac{1}{4}\,\pi\, R^4 \,.
\end{aligned}$$

e) $I = \int_{Q_{sup}} \rho \cos\phi \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta + \int_{Q_{inf}} z \cdot \rho \; dz \, d\rho \, d\theta = -\frac{1}{4}\,\pi\,R^4$

4/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{-\frac{1}{4}\,\pi\,R^4}{\frac{(2+\sqrt{2})}{3}\,\pi\,R^3} = -\frac{3}{4\,(2+\sqrt{2})}\,R \;\; \cdot \;\; \frac{(2-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})} = -\frac{3\,(2-\sqrt{2})}{8}\,R\,.$$

f) $x_b = 0$ $\quad$ $y_b = 0$ $\quad$ $z_b = \frac{I}{V} = -\frac{3\,(2-\sqrt{2})}{8}\,R$

2/30