Prova scritta di Matematica II - 5 luglio 2012 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 ortogonale al piano $5\,x+2\,y=0$ e contenente uno dei tre assi coordinati;

1.a.b. piano Π_2 costituito dai punti equidistanti da $(10,4,4)$ e $(0,0,0)$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alle sfere $x^2+y^2+z^2 \leq 25$ e $(x-8)^2+(y+6)^2+z^2 \leq 25$ nel loro unico punto di contatto;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il vettore normale al piano Π_1 deve risultare ortogonale a $(4,-3,0)$ ed è quindi della forma $(3,4,c)$. Il piano Π_1, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), ha quindi equazione $3\,x+4\,y+c\,z=0$. Pertanto $c=0$ e l'asse contenuto è necessariamente quello delle z (caratterizzato dalle equazioni $x=0$ e $y=0$). In conclusione, Π_1 risulta caratterizzato dall'equazione $3\,x+4\,y=0$. $3\,x+4\,y=0$.

Il vettore $(8,-6,6)-(0,0,0)=(8,-6,6)$ risulta ortogonale al piano Π_2 che ha quindi equazione $4\,x-3\,y+3\,z=d$. Il valore di d risulta determinato dalla condizione di passaggio per il punto medio $\left(\frac{8+0}{2},\frac{-6+0}{2},\frac{6+0}{2}\right)=(4,-3,3)$, ossia $d=(4,-3,3)\cdot(4,-3,3)=34$.

Le sfere hanno centro in $C_1=(0,0,0)$ e $C_2=(8,6,0)$ rispettivamente. Entrambe le sfere hanno raggio $\sqrt{25}=5$ e quindi, se hanno un unico punto di contatto, questo dovrà coincidere con il punto medio del segmento $\overline{C_1C_2}$, ossia $\left(\frac{0+8}{2},\frac{0+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(4,3,0)$. In effetti, dal teorema di Pitagora, e come da terna Pitagorica $3-4-5$, il punto $(4,3,0)$ dista 5 da entrambi i centri e resta così confermata la tangenza delle due sfere. Il piano Π_3 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(4,3,0)$ ed avrà equazione $(x,y,z)\cdot(4,3,0)=(4,3,0)\cdot(4,3,0)$ ossia $4\,x+3\,y=25$.

I piani Π_1 e Π_2 sono ortogonali, come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(3,4,0)\cdot(4,-3,3)=12-12+0=0$. Invece Π_3 è in relazione generica (nè ortogonale nè parallelo) sia con Π_1 che con Π_2. Vista l'ortogonalità tra Π_1 e Π_2, questa affermazione risulta verificata una volta verificato che Π_3 non è ortogonale nè a Π_1 nè a Π_2. In effetti, $(4,3,0)\cdot(3,4,0)=24\neq 0$ e $(4,3,0)\cdot(4,-3,3)=7\neq 0$.

Π_1: $3\,x+4\,y=0$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $4\,x-3\,y+3\,z=34$	
Π_3: $4\,x+3\,y=25$	1+1+1+2/30

1.b. Date le 3 rette:

$$R_1(t):(t,\alpha\,t,t) \qquad R_2(t):(2\,t,3\,t,2\,t) \qquad R_3(t):(\alpha\,t,t,\beta\,t)\,.$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) le tre rette sono contenute in uno stesso piano;

2.) le rette R_1 e R_2 sono parallele;

3.) le rette R_1 e R_3 sono parallele.

Affinchè le 3 rette siano contenute in uno stesso piano è necessario che le loro direzioni $(1, \alpha, 1)$, $(2, 3, 2)$ e $(\alpha, 1, \beta)$ siano contenute in uno stesso piano. Tali vettori sono tutti contenuti in uno stesso piano se e solo se è nullo il volume del parallelepipedo che essi sottintendono, ossia ove si annulli il prodotto triplo:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ \alpha & 1 & \beta \end{array} \right\| = 3\beta + 2\alpha^2 + 2 - 3\alpha - 2 - 2\alpha\beta = (2\alpha - 3)(\alpha - \beta)\,.$$

Le direzioni delle 3 rette sono quindi coplanari solo quando $\alpha = \frac{3}{2}$ o quando $\alpha = \beta$. Si noti poi che tutte e tre le rette passano per uno stesso punto $(0, 0, 0)$ e pertanto le 3 rette sono coplanari precisamente quando le direzioni delle 3 rette sono coplanari.

Quando $\alpha = \frac{3}{2}$ le rette R_1 e R_2 sono parallele.

Il parallellismo tra R_1 e R_3 si ha per $\alpha = \beta = 1$ e per $\alpha = \beta = -1$.

1.) R_1, R_2, R_3 coplanari: $\alpha = \frac{3}{2}$ oppure $\alpha = \beta$

2.) R_1, R_2 parallele: quando $\alpha = \frac{3}{2}$

3.) R_1, R_3 parallele: $\alpha = \beta = 1$ oppure $\alpha = \beta = -1$

2+1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta $R(t) = (1 + t, t, 2\,t)$ ed il piano $x + y - z = 0$.

La direzione $(1, 1, 2)$ della retta R è in effetti ortogonale alla normale al piano $(1, 1, -1)$ e pertanto retta e piano sono paralleli. Basta quindi calcolare la distanza dal piano per uno qualsiasi dei punti della retta, come $R(0) = (1, 0, 0)$. Utilizzando la formula per la distanza punto/piano otteniamo $d(R, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$d(R, \Pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (1, 1, 1 + t)$ e la retta R_2 di equazioni $y = \sqrt{5}$ e $z = x + 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 è contenuta nel piano $y = 1$, mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $y = \sqrt{5}$, parallelo a $y = 1$ ed a distanza $\sqrt{5} - 1$ da esso. La distanza tra R_1 ed R_2 è quindi non inferiore a $\sqrt{5} - 1$. I punti $R_1(1) = (1, 1, 2)$ di R_1 e $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 distano proprio $\sqrt{5} - 1$ confermando questo come valore di distanza tra le 2 rette.

Le due rette sono sghembe poichè il piano $x = 1$ contiene tutta R_1 ed anche il punto $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 ma non riesce a contenere tutta R_2 (non contiene ad esempio il punto $(0, \sqrt{5}, 1)$ di R_2).

$d(R_1, R_2) = \sqrt{5} - 1\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = yx^2 + 4\,x - 4\,y - x^3\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

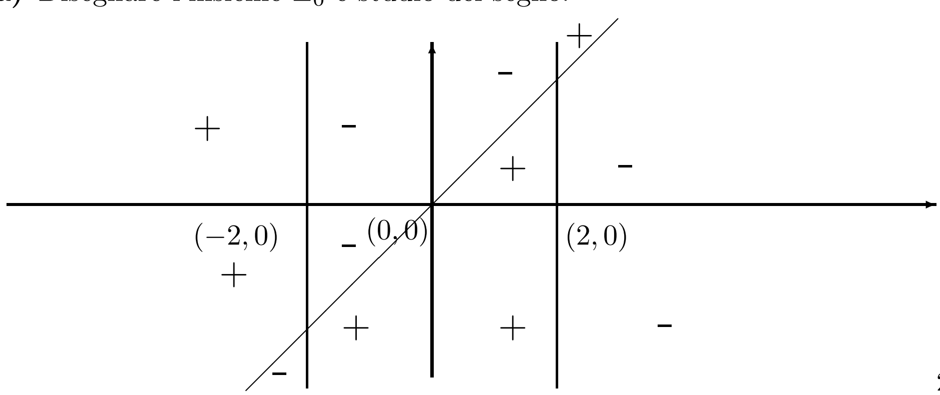
Raccogliendo y dai due termini in posizione dispari e $-x$ dai due termini in posizione pari, otteniamo la fattorizzazione:

$$F(x, y) = yx^2 + 4\,x - 4\,y - x^3 = y(x^2 - 4) - x(x^2 - 4) = (y - x)(x^2 - 4)\,.$$

Non é difficile a questo punto ultimare la fattorizzazione, ottenendo $F(x, y) = (y - x)(x + 2)(x - 4)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (y - x)(x + 2)(x - 4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulli $(y - x)$ o $(x + 2)$ o $(x - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \vee \vee x = \pm 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4$

e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 4$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che $x = \pm 2$, ed i corrispondenti valori della y restano poi determinati dalla prima prima equazione. Otteniamo così i 2 punti stazionari: $(2, 2)$, $(-2, -2)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che essi sono entrambi punti di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(2, 2)$, $(-2, -2)$.

I punti $(2, 2)$ e $(-2, -2)$ sono entrambi selle della F.

5/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0, 0, 0)$.

Poichè $F(0, 0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0, 0, 0)$:

$z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il perimetro di Q. Lo studi del segno di cui al punto (a) restringe la nostra ricerca ai lati orizzontali, e vista la simmetria $F(-x, -y) = -F(x, y)$ ci si limita all'esame del bordo superiore, caratterizzato dall'equazione $y = 2$. Qui $F(x, y) = (y - x)(x^2 - 4) = 2\,x^2 - x^3 + 4\,x - 8$ e $F_x = 4\,x - 3\,x^2 + 4$. Ponendo $F_x = 0$ otteniamo $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3}$. La radice $x = 2$ era scontata (e vale quindi a conferma/verifica) ma non è interessante. La soluzione interessante individua il punto di minimo assoluto $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$.

2.d) punti estremali di F in Q

1 MAX ASSOLUTO: $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$

1 MIN ASSOLUTO: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

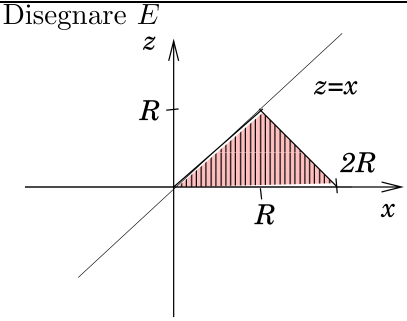
4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq \min\{x, 2R - x\}$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

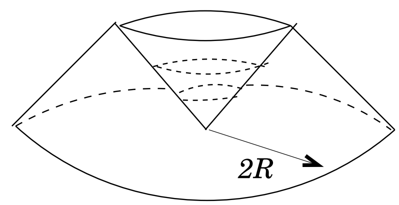
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;
3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z\ dx\, dy\, dz$;
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, (R,R), e $(0,2R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2+y^2}, 2R - \sqrt{x^2+y^2}\}\ \right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq z \leq \min\{\rho, 2R-\rho\}\ \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho\ dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2R-z} \rho\ dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R\int_z^{2R-z} \rho\ d\rho\, dz\right) \\
&= 2\,\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2R-z} dz = 2\,\pi \int_0^R 2R^2 - 2Rz\ dz = 2\,\pi\ \left[2R^2 z - Rz^2\right]_0^R = 2\,\pi\, R^3\,.
\end{aligned}
$$

c)

$V = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2R-z} \rho\ dz\, d\rho\, d\theta = 2\,\pi\, R^3$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int\int_Q z\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2R-z} z\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^R z\int_z^{2R-z}\rho \; d\rho\, dz\right) \\
&= 2\,\pi\int_0^R z\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2R-z} dz = 2\,\pi\int_0^R 2R^2 z - 2Rz^2 \; dz = 2\,\pi\left[R^2z^2 - \frac{2}{3}Rz^3\right]_0^R = \frac{2}{3}\,\pi\, R^4\,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2R-z} z\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{2}{3}\,\pi\, R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{2}{3}\,\pi\, R^4}{2\,\pi\, R^3} = \frac{1}{3}\,R\,.
$$

e) $x_b = 0$ $\quad y_b = 0$ $\quad z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{3}\,R$

2/30