Prova scritta di Matematica II - 28 settembre 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(3,2,0)$, $(3,2,1)$ e $(6,4,1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (t, 1, -3\,t)$ e la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 7$ nel punto $(1,1,1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $2\,x - 3\,y = 0$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1.

Se il piano Π_2 contiene la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $3\,x + 2\,y = 1$ e $z = 1$, ossia $3\,\alpha x + 2\,\alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $3\,x + 2\,y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (t, 1, -3\,t)$, che comporta $3\,t + 2 - 3\,\beta t = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $3\,x + 2\,y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x,y) = 3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 7$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,1,1)$, ch e possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6,4,2)$, che preferiamo rimpiazzare con $(3,2,1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(3,2,1)$ e passante per $(1,1,1)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(3,2,1)$ eguaglia quello di $(1,1,1)$, che é 6.

Π_1: $2\,x - 3\,y = 0$

Π_2: $3\,x + 2\,y + z = 2$

Π_3: $3\,x + 2\,y + z = 6$

Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(1,1,1)$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R'(t) = (0, 1+t, 1+2\,t)$.

La retta R sarà contenuta nel piano ortogonale a $(0,1,2)$ e passante per $(1,1,1)$, ossia nel piano $y + 2\,z = 3$ e passerà, oltre che per $(1,1,1)$, anche per il punto di R' contenuto in tale piano, dato da $(1+t) + 2\,(1+2\,t) = 3$, quindi da $t = 0$, e quindi $(0,1,1)$. La direzione di R é espressa dal vettore $(1,1,1) - (0,1,1) = (1,0,0)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (t,1,1)$.

$R(t) = (t, 1, 1)\,.$

3/30

$$\boxed{R(t) = (1+t, 2, 3)\,. \qquad 3/30}$$

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette distinte R_1 ed R_2 di equazioni parametriche $x = \sqrt{2}$, $y = \pi\, t + 3$, $z = 1 - \pi\, t$ e $x = 0$, $y = 3 + \sqrt{2} - s$, $z = 1 + s$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

È evidente che le due rette sono parallele in quanto hanno direzione $(0, \pi, -\pi)$ e $(0, -1, 1)$ rispettivamente. (Di fatto risulta altresì evidente che R_1 trova una riscrittura parametrica più semplice come $x = \sqrt{2}$, $y = 3 - t$, $z = 1 + t$, ed a questo punto il parallellismo è, se possibile, ancora più evidente). Dal parallellismo disegue la coplanarità.

La direzione comune alle due rette è quella espressa dal versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$. Un modo pratico di misurare la distanza tra R_1 ed R_2 è pertanto quello di prendere la norma del prodotto vettoriale tra il versore $(0, -1, 1)/\sqrt{2}$ ed un qualsiasi vettore spostamento da un punto di R_1 ad un punto di R_2. Come vettore spostamento risulta conveniente prendere $R_2(0) - R_1(0) = (0, 3 + \sqrt{2}, 1) - (\sqrt{2}, 3, 1) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ottenendo

$$d(R_1, R_2) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1) \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right| = |(0, -1, 1) \wedge (-1, 1, 0)| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,.$$

Resta così confermato che le due rette siano distinte.

$$\boxed{\begin{array}{l} d(R_1, R_2) = \left|(0, -1, 1)/\sqrt{2} \wedge (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)\right| = |(-1, -1, -1)| = \sqrt{3}\,. \\ \text{le rette } R_1 \text{ e } R_2 \text{ sono parallele e distinte} \qquad 3{+}1/30 \end{array}}$$

Un procedimento alternativo per il computo della distanza tra le due rette R_1 ed R_2 poteva essere quello di scegliere un qualsiasi punto di R_1, come $R_1(0) = (\sqrt{2}, 3, 1)$ e ricercare il punto di R_2 a minima distanza da esso minimizzando il funzionale $d(R_2(s), R_1(0))$ visto come funzione della sola variabile s. Di fatto, vista la monotonia della funzione radice, basta ricercare quel valore di s che minimizza il funzionale $(0 - \sqrt{2})^2 + ((3 + \sqrt{2} - s - 3)^2 + ((1 + s) - 1)^2$, ossia quello che minimizzi il funzionale $(\sqrt{2} - s)^2 + (s)^2 = 2 - 2\sqrt{2}\, s + 2\, s^2$. Il valore di s ricercato é $-\sqrt{2}/2$ e

$$d(R_1, R_2) = d(R_1(0), R_2(-\sqrt{2}/2)) = d((\sqrt{2}, 3, 1), (0, 3 + \sqrt{2}/2, 1 - \sqrt{2}/2)) = \sqrt{2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{3}\,.$$

2. È data la funzione $F(x, y) = (x - y)^2 + x^2 y - (x^2 + y^2)\,.$

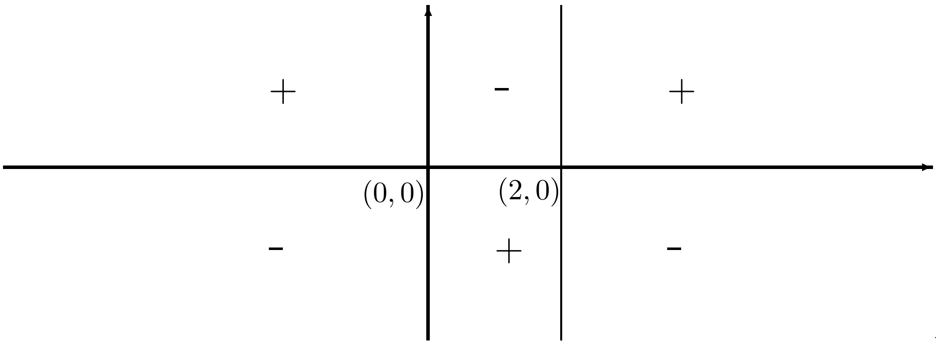
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x-y)^2 + x^2y - (x^2+y^2) = x^2 - 2\,xy + y^2 + x^2y - x^2 - y^2 = x^2y - 2\,xy \\ &= x(x-2)y\,. \end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x(x-2)y$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o y. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = \pm 2 \vee y = \pm 0\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Nessuna di queste regioni è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x(x-2)y$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)y$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y &= 0 \\ x(x-2) &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0,0)$ e $(2,0)$. Si noti che entrambi i punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che entrambi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

2 PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$ e $(2,0)$.

Entrambi i punti stazionari sono punti di sella.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2, dove, per $i = 0, 1, 2$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(i, 0, 0)$;

In effetti, per $i = 0, 1, 2$, il punto $(i, 0, 0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(i, 0) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0, 0)$ e $(2, 0)$ sono punti stazionari, i piani Π_0 e Π_2 sono perfettamente orrizzontali, ed essendo entrambi disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_1. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(1, 0) = F_x(1, 0)\,(x - 1) + F_y(1, 0)\,(y - 0)$ ed otteniamo l'equazione $z = 0\,(x - 1) - 1\,y$, che si semplifica in $z = -y$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0, 0)$ a $(2, 0)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 0$ $\qquad$ Π_1: $z = -y$ $\qquad$ Π_2: $z = 0$ $\qquad$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 12\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)y & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ x(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 - 2\,x & = g(x, y) & = & 12\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1, 0)$.

A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione è soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm\sqrt{13}$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente la cosa, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm\sqrt{13}) = \mp\sqrt{13}$.

L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica drammaticamente in $\lambda = y$, che, infornato nella seconda equazione porta a conludere che

$2\,y^2 = x(x-2)$. Questa equazione combinata con la terza (per praticità, si moltiplichi la terza equazione per 2 ed in essa si sostituisca quindi $2\,y^2 = x(x-2)$) conduce ad un'equazione di secondo grado le cui radici sono $x = -2$ ed $x = 4$. A ciascuna di esse corrispondono 2 valori per y ($y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$) per un totale di 4 punti estremali dalle evidenti simmetrie. In effetti la F presenta le simmetrie $F(x,-y) = -F(x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse delle x) e $F(1+x,y) = F(1-x,y)$ (e si noti che R è simmetrica per ribaltamento rispetto all'asse $x = 1$). Ora, $F(4,2) = 16 > \sqrt{13}$ e pertanto questi quattro punti sono tutti estremi assoluti.

2.d)

2 Max Assoluti: $(-2,2)$ e $(4,2)$; $F(-2,2) = F(4,2) = 16$

2 Min Assoluti: $(-2,-2)$ e $(4,-2)$; $F(-2,-2) = F(4,-2) = -16$

1 Max Relativo: $(1,-\sqrt{13})$; $F(1,-\sqrt{13}) = \sqrt{13}$

1 Min Relativo: $(1,\sqrt{13})$; $F(1,\sqrt{13}) = -\sqrt{13}$ 6/30

2.e. Descrivere il domino $D[h]$ di $h(x,y) := \log_2 x(x-2)y$ in coordinate cartesiane.

2.e)

$$D[h] = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x(x-2)y > 0 \right\}$$

1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E il triangolo del piano $y = 0$ di vertici $(R,0)$, (R,R) e $(2\,R,0)$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

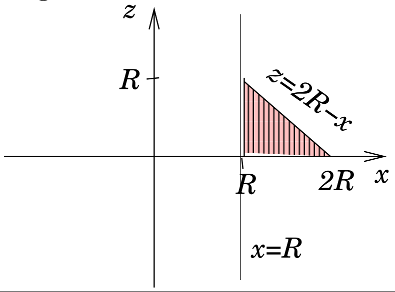
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;

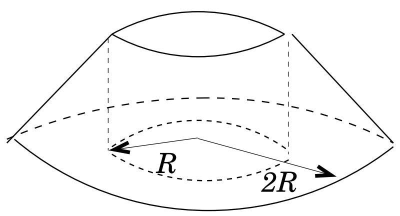
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(R,0)$, (R,R), e $(2\,R,0)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ R \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\,R - z \} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ R \le \rho \le 2\,R - z \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$\begin{aligned} V &= \int\int\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho\, dz\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho\, dz \right) = 2\,\pi \int_0^R \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_R^{2\,R-z} dz \\ &= 2\,\pi \int_0^R 2\,R^2 - 2\,R\,z + \frac{z^2}{2} - \frac{R^2}{2} \; dz = 2\,\pi \left[2\,R^2\,z - R\,z^2 + \frac{z^3}{6} - \frac{R^2\,z}{2} \right]_0^R = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,. \end{aligned}$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho\, dz\, d\theta = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_Q z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} z\,\rho \; d\rho\, dz\, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R z \int_R^{2\,R-z} \rho \; d\rho\, dz \right) = 2\,\pi \int_0^R z \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_R^{2\,R-z} d\rho \\ &= 2\,\pi \int_0^R 2\,R^2\,z - 2\,R\,z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{R^2\,z}{2} \; dz = 2\,\pi \left[R^2\,z^2 - \frac{2}{3} R\,z^3 + \frac{z^4}{8} - \frac{R^2\,z^2}{4} \right]_0^R = \frac{5}{12}\,\pi\,R^4\,. \end{aligned}$$

d)

$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_R^{2\,R-z} z\,\rho \; d\rho\, dz\, d\theta = \frac{5}{12}\,\pi\,R^4$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{5}{12}\,\pi\,R^4}{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3} = \frac{5}{16}\,R\,.$$

e) $x_b = 0$ $y_b = 0$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{5}{16}\, R$

2/30