Prova scritta di Matematica II - 13 settembre 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(0,0,3)$, $(3,0,0)$ e $(1,-5,1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (1, t, -3\,t)$ e la retta $2\,x + 3\,y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $2\,x^2 + 3\,y^2 + 2\,z = 7$ nel punto $(1,1,1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $5\,x - y + 5\,z = 15$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1.

Se il piano Π_2 contiene la retta $2\,x + 3\,y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $2\,x + 3\,y = 1$ e $z = 1$, ossia $2\,\alpha x + 3\,\alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $2\,x + 3\,y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (1, t, -3\,t)$, che comporta $2 + 3\,t - 3\,\beta t = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $2\,x + 3\,y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x,y) = 2\,x^2 + 3\,y^2 + 2\,z = 7$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,1,1)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(4,6,2)$, che preferiamo rimpiazzare con $(2,3,1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(2,3,1)$ e passante per $(1,1,1)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(2,3,1)$ eguaglia quello di $(1,1,1)$, che é 6.

Π_1: $5\,x - y + 5\,z = 15$

Π_2: $2\,x + 3\,y + z = 2$

Π_3: $2\,x + 3\,y + z = 6$

Π_1 (G) Π_2 (P) Π_3 (G) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 piani:

$$\Pi_1 : (\alpha + \beta)\,x + \beta\,y + 3\,z = 1 \qquad \Pi_2 : (\alpha + \beta)\,x - y + z = 0 \qquad \Pi_3 : \beta\,x + z = 5\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.1.) Π_1 e Π_2 sono paralleli; 1.2.) Π_2 e Π_3 paralleli; 1.3.) Π_1 e Π_3 paralleli;

2.) Π_1 e Π_3 sono ortogonali;

3.) Π_2 e Π_3 sono ortogonali.

Si denotino con $v_1 = (\alpha+\beta, \beta, 3)$, $v_2 = (\alpha+\beta, -1, 1)$ e $v_3 = (\beta, 0, 1)$ i vettori normali ai piani Π_1, Π_2 e Π_3, rispettivamente. La prima delle tre domande chiede di indagare le relazioni di parallellismo tra questi 3 vettori. Affinchè v_1 sia parallelo a v_2, ossia $v_1 = \lambda v_2$, dovremo avere che $\lambda = 3$ (dal rapporto delle terze componenti di v_1 e v_2) e quindi $\beta = -3$ (seconde componenti) e quindi $\alpha = 3$ (prime componenti). Inoltre v_3 non sarà parallelo a v_2 per alcun valore di α e β (seconde componenti). Il parallellismo di v_1 e v_3 richiede $\alpha = \beta = 0$.

I piani Π_1 e Π_3 sono ortogonali se e solo se lo sono v_1 e v_3 ossia se

$$0 = v_1 \cdot v_3 = (\alpha+\beta, \beta, 3) \cdot (\beta, 0, 1) = \alpha\beta + \beta^2 + 3\,,$$

cioè per $\alpha = -\frac{\beta^2+3}{\beta}$, $\beta \neq 0$.

I piani Π_2 e Π_3 sono ortogonali se e solo se lo sono v_2 e v_3 ossia se

$$0 = v_2 \cdot v_3 = (\alpha+\beta, -1, 1) \cdot (\beta, 0, 1) = \alpha\beta + \beta^2 + 1\,,$$

cioè per $\alpha = -\frac{\beta^2+1}{\beta}$, $\beta \neq 0$.

1.) $\Pi_1 \parallel \Pi_2$: $\alpha = 3 = -\beta$	$\Pi_2 \parallel \Pi_3$: mai	$\Pi_1 \parallel \Pi_3$: $\alpha = \beta = 0$
2.) $\Pi_1 \times \Pi_3$: per $\alpha = -\frac{\beta^2+3}{\beta}$ con $\beta \neq 0$		
3.) $\Pi_2 \times \Pi_3$: per $\alpha = -\frac{\beta^2+1}{\beta}$ con $\beta \neq 0$		1+1+1/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(1,2,3)$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R'(t) = (0, 1+t, 1+2\,t)$.

La retta R sarà contenuta nel piano ortogonale a $(0,1,2)$ e passante per $(1,2,3)$, ossia nel piano $y + 2\,z = 8$ e passerà, oltre che per $(1,2,3)$, anche per il punto di R' contenuto in tale piano, dato da $(1+t) + 2\,(1+2\,t) = 8$, quindi da $t = 1$, e quindi $(0,2,3)$. La direzione di R é espressa dal vettore $(1,2,3) - (0,2,3) = (1,0,0)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1+t, 2, 3)$.

$$R(t) = (1+t, 2, 3)\,.$$

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $3y = 2z$ e $y = -2x$ e la retta $R_2 = (1-2\,t, 3-t, 2+t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, -2\,t, -3\,t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1,-2,-3)$ e la retta

R_2 di direzione $(-2,-1,1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0,0,0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1,3,2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)\cdot(P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)\cdot(1,3,2) = 0\,.$$

Quindi le due rette si incontrano. Entrambe le rette sono infatti contenute nel piano $x - y + z = 0$, e, come abbiamo osservato, non sono parallele. Per determinare il punto di incontro, da $y = -2x$ otteniamo $3 - t = -2\,(1 - 2\,t)$, da cui $t = 1$ che individua in R_2 il punto $(-1,2,3)$.

$d(R_1, R_2) = 0\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono incidenti con incontro nel punto $(-1,2,3)$. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x^2\,(y+7) - 9\,(x^2 + y - 2)\,.$

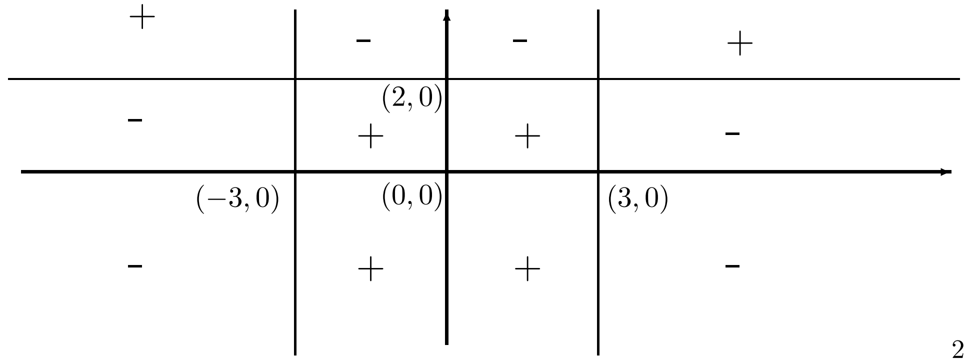
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F.

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= x^2\,(y+7) - 9\,(x^2 + y - 2) && \text{come data}\\
&= x^2\,y + 7\,x^2 - 9\,x^2 - 9\,y + 18 && \text{sviluppata}\\
&= x^2\,y - 2\,x^2 - 9\,y + 18 && \text{dopo ovvio raccoglimento}\\
&= (x^2 - 9)(y - 2) && \text{prima fattorizzazione}\\
&= (x-3)(x+3)(y-2)\,. && \text{completamente fattorizzata}
\end{aligned}$$

Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di Σ_0. Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = (x-3)(x+3)(y-2)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o $(x-3)$ o $(x+3)$ o $(y-2)$. Quindi, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 3 \vee y = 2\ \}$ ed il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. Di queste regioni, una sola è limitata (quella centrale).

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = (x^2-9)(y-2)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,x(y-2)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 9$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,x(y-2) &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni i due punti $(\pm 3, 2)$. Si noti che $F(\pm 3, 2) = 0$, e che i punti $(\pm 3, 2)$ sono di sella per quanto visto allo studio del segno.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: i 2 punti $(\pm 3, 2)$.

I punti $(\pm 3, 2)$ sono punti di sella.

3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(1,1,8)$;

In effetti il punto $(1,1,8)$ appartiene al grafico della F poichè $F(1,1) = 8$. Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali $F_x = 2\,x(y-2)$ e $F_y = x^2 - 9$ esistono e sono continue in un intorno di $(1,1)$, la F è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della F nell'intorno del punto $(1,1)$. Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi inspirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come $z - F(1,1) = F_x(1,1)\,(x-1) + F_y(1,1)\,(y-1)$ ed otteniamo l'equazione $z-8=-2\,(x-1)-8\,(y-1)$, che si semplifica in $2\,x+8\,y+z=18$. A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto $(1,1,8)$ appartenga a tale piano.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(1,1,8)$: $2\,x+8\,y+z=18$ 2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 16\}$.

La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto di minimo, i minimi della F saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto investighiamo eventuali estremi sulla frontiera impiegando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y)=x^2+y^2$ e $g_x=2\,x$ e $g_y=2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,x(y-2) & = F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ x^2-9 & = F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2+y^2 & = g(x,y) = & 16\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo allora assumere $\lambda\neq 0$. Per incominciare, si assuma $x\neq 0$. In questo caso la prima equazione si semplifica in $(y-2)=\lambda$, che sostituito nella seconda equazione conduce a $x^2=2\,y^2-4\,y+9$, che sostituito nella terza porta all'equazione di secondo grado $3\,y^2-4\,y-7=0$, con $y_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+21}}{3}=\frac{2\pm 5}{3}$. Sempre in base alla terza equazione, queste due radici rilevano i punti di minimo $(\pm\sqrt{15},-1)$ ed i punti di massimo $\left(\pm\frac{\sqrt{95}}{3},\frac{7}{3}\right)$. Con $x=0$ otteniamo invece $y=\pm 4$ dalla terza equazione. Ora $F(0,4)=-18=$ e $F(0,-4)=54$ mentre $F(\pm\sqrt{15},-1)=-18$ e $F\left(\pm\frac{\sqrt{95}}{3},\frac{7}{3}\right)=\frac{14}{27}$ Se ne conclude che i 3 punti $(0,4)$ e $(\pm\sqrt{15},-1)$ sono minimi assoluti su R, ed il punto $(0,-4)$ è massimo assoluto su R mentre i 2 punti $\left(\pm\frac{\sqrt{95}}{3},\frac{7}{3}\right)$ sono massimi relativi su R.

2.d)   3 Min Assoluti: $(0,4)$, $(\pm\sqrt{15},-1)$; $F(0,\pm 5)=-18=F(\pm\sqrt{15},-1)$ 2 Max Relativi: $\left(\pm\frac{\sqrt{95}}{3},\frac{7}{3}\right)$, ; $F\left(\pm\frac{\sqrt{95}}{3},\frac{7}{3}\right)=\frac{14}{27}$ 1 Max Assoluto: $(0,-4)$; $F(0,-4)=54$ 6/30

3. In un riferimento Cartesiano x,y,z sia E la regione del primo quadrante del piano $y=0$ delimitata dall'asse delle z e dalle curve $z=2-x^2$ e $z=x$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

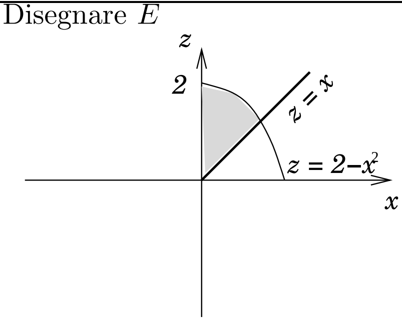
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \, dx \, dy \, dz$;

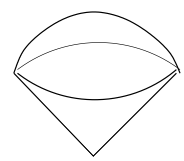
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dalle rette $x = 0$ e $z = x$ e dalla parabola $z = 2 - x^2$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z^2 \geq x^2 + y^2, \ z \leq 2 - x^2 - y^2 \ \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \rho \geq 0, \ \rho \leq z \leq 2 - \rho^2 \ \right\}$ 1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho \int_\rho^{2-\rho^2} 1 \, dz \, d\rho \right) \\
&= 2\pi \left(\int_0^1 \rho(2 - \rho^2 - \rho) \, d\rho \right) = 2\pi \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 \\
&= 2\pi \left[1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right] = \frac{5}{6}\pi \, .
\end{aligned}
$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\rho^{2-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \frac{5}{6}\pi$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\!\!\int\!\!\int_Q z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{2-\rho^2} z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho \int_\rho^{2-\rho^2} z\; dz\, d\rho\right) = \pi\left(\int_0^1 \rho(2-\rho^2)^2 - \rho^3\; d\rho\right) \\
&= \pi\left(\int_0^1 \rho^5 - 5\,\rho^3 + 4\,\rho\; d\rho\right) = \pi\left[\frac{\rho^6}{6} - \frac{5}{4}\rho^4 + 2\,\rho^2\right]_0^1 \\
&= \pi\left[\frac{1}{6} - \frac{5}{4} + 2\right] = \frac{11}{12}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

d) $I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{2-\rho^2} z\,\rho\; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{11}{12}\,\pi$	3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{11}{12}\,\pi}{\frac{5}{6}\,\pi} = \frac{11}{10}\,.
$$

e) $x_b = 0$	$y_b = 0$	$z_b = \frac{I}{V} = \frac{11}{10}$	2/30