Prova scritta di Matematica II - 14 giugno 2011 - CORREZIONE Fila A

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ e $(4,5,6)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$ e la retta $2\,x + y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $x^2 + y + z = 3$ nel punto $(1,1,1)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti valgono $y = x + 1$ e $z = x + 2$, quindi $2\,x - y - z = -3$ é equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per assicurarsene (e meglio comprendere).

Se il piano Π_2 contiene la retta $2\,x + y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $2\,x+y = 1$ e $z = 1$, ossia $2\,\alpha x+\alpha y+\beta z = 1(\alpha+\beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $2\,x + y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (1, 3\,t, -3\,t)$, che comporta $2 + 3\,t - 3\,\beta t = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $2\,x + y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x,y) = 3\,x^2 + 3\,y + 3\,z = 9$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right) \|_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1,1,1)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6,3,3)$, che preferiamo rimpiazzare con $(2,1,1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(2,1,1)$ e passante per $(1,1,1)$. Il generico punto (x,y,z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(2,1,1)$ eguaglia quello di $(1,1,1)$, che é 4.

Π_1: $2\,x - y - z = -3$	Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $2\,x + y + z = 2$	
Π_3: $2\,x + y + z = 4$	1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha, \alpha, \alpha - 2\,\beta) \qquad v_2 : (1, \alpha^2, \alpha - 4\beta) \qquad v_3 : (0,1,1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_1 e v_3 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 le prime due componenti di questi vettori devono essere proporzionali: otteniamo $\alpha : 1 = \alpha : \alpha^2$, ossia $\alpha^2 = 1$, da cui $\alpha = \pm 1$. Se $\alpha = 1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\beta = 0$ (dalla terza componente). Se $\alpha = -1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\alpha - 2\beta = -(\alpha - 4\beta)$ (per la terza componente) da cui $\beta = \frac{2}{6}\alpha = -\frac{1}{3}$.

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_3 = \alpha + (\alpha - 2\beta)$ si annulla per $\beta = \alpha$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \alpha & \alpha - 2\beta \\ 1 & \alpha^2 & \alpha - 4\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \alpha^3 + (\alpha - 2\beta) - \alpha - \alpha(\alpha - 4\beta) = 2\beta(2\alpha - 1) + \alpha^3 - \alpha^2 .$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2 - 4\alpha}$ (ha senso per $\alpha \neq \frac{1}{2}$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, -\frac{1}{3})$

2.) v_1 e v_2 ortogonali: per $\beta = \alpha$

3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: per $\beta = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{2 - 4\alpha}$ (con $\alpha \neq \frac{1}{2}$)

1+1+2/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(1, 2, 3)$ ed incidente ortogonalmente nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = \pi$.

La retta R passerà per il centro $(1, 1, 1)$ della sfera, e la sua direzione sarà espressa dal vettore $(1, 2, 3) - (1, 1, 1) = (0, 1, 2)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1, 1 + t, 1 + 2t)$.

$R(t) = (1, 1 + t, 1 + 2t)$.

3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $3y = 2z$ e $y = -2x$ e la retta $R_2 = (1 - 2t, 1 - t, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, -2t, -3t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, -2, -3)$ e la retta R_2 di direzione $(-2, -1, 1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo

$t = 0$) e sia $P_2 = (1, 1, 2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1) \cdot (1, 1, 2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = x^3 - 2\,x^2 + x - 4\,x\,y^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

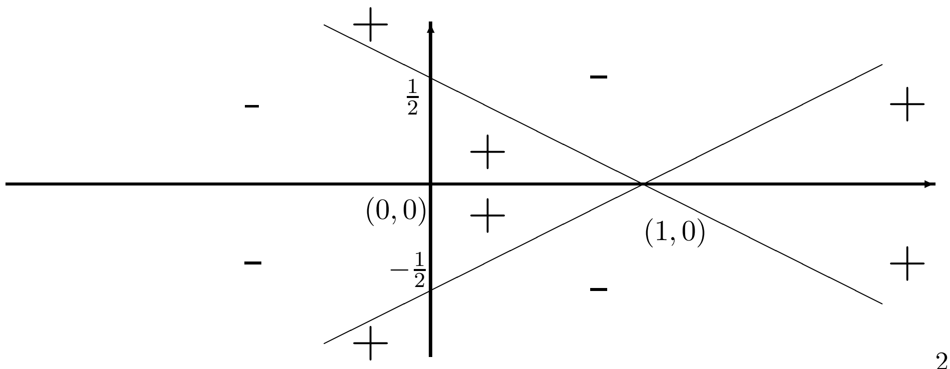
$F(x, y) =$

$$\begin{array}{rcl l}
F(x, y) & = & x^3 - 2\,x^2 + x - 4\,x\,y^2 & \text{come data} \\
& = & x(x^2 - 2\,x + 1 - 4\,y^2) & \text{raccogliamo la } x \\
& = & x((x-1)^2 - 4\,y^) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
& = & x\,((x-1) + 2\,y)((x-1) - 2\,y) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\
& = & x\,(x + 2\,y + 1)(x - 2\,y - 1)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = x\,(x+2\,y+1)(x-2\,y-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(x+2\,y+1)$ o $)(x-2\,y+1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \vee y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 3\,x^2 - 4\,x + 1 - 4\,y^2$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = -8\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 - 4\,x + 1 - 4\,y^2 &= 0 \\ -8\,xy &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, \pm\frac{1}{2})$ e $(1, 0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x,y) & F_{xh}(x,y) \\ F_{yx}(x,y) & F_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,x - 4 & -8\,y \\ -8\,y & -8\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} 6\,x - 4 & -8\,y \\ -8\,y & -8\,x \end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{3},0\right)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} -2 & -0 \\ -0 & -8/3 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) < 0$ ne consegue che $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è punto di massimo locale. In effetti un tale massimo doveva essere presente nella regione triangolare evidenziato con lo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerato che $F(x, -y) = F(x, y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, \pm 1)$, $(1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

I punti $(0, \pm 1)$ e $(1, 0)$ sono selle.

Il punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è un massimo locale.

5/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0, 0, 0)$.

Poichè $F(0, 0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = x$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0, 0, 0)$:

$z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = x$

1/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la regione del primo quadrante del piano $y = 0$ delimitata dagli assi e dalla curva $z = (x - 1)^2$. Sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

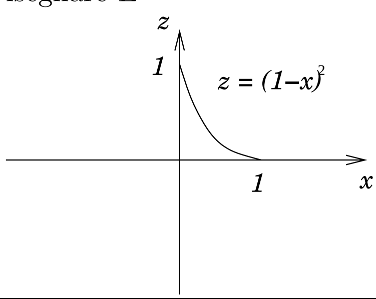
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

3.d. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \, dx \, dy \, dz$;

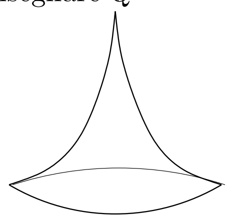
3.e. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E, situata nel primo quadrante, è contornata dagli assi e da un ramo della parabola $z = (x - 1)^2$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, \, 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \rho \leq 1, \, 0 \leq z \leq 1 + \rho^2 - 2\rho \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\!\!\int\!\!\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \; d\theta\right) \left(\int_0^1 \rho \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} 1 \; dz\, d\rho\right) \\
&= 2\,\pi \left(\int_0^1 \rho(1+\rho^2-2\,\rho)\; d\rho\right) = 2\,\pi \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} - \frac{2}{3}\rho^3\right]_0^1 \\
&= 2\,\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right] = \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}
$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{6}$

5/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$
\begin{aligned}
I &= \int\!\!\int\!\!\int_Q z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \; d\theta\right) \left(\int_0^1 \rho \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z \; dz\, d\rho\right) = \pi \left(\int_0^1 \rho(1+\rho^2-2\,\rho)^2 \; d\rho\right) \\
&= \pi \left(\int_0^1 \rho^5 - 4\,\rho^4 + 6\,\rho^3 - 4\,\rho^2 + \rho \; d\rho\right) = \pi \left[\frac{\rho^6}{6} - \frac{4}{5}\rho^5 + \frac{3}{2}\rho^4 - \frac{4}{3}\rho^3 + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \pi \left[\frac{1}{6} - \frac{4}{5} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right] = \frac{10-48+90-80+30}{60}\,\pi = \frac{1}{30}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$

d)

$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1+\rho^2-2\,\rho} z\,\rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{30}\,\pi$

3/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$
z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{30}\,\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}\,.
$$

e) $x_b = 0$ $y_b = 0$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{1}{5}$

2/30