Prova scritta di Matematica II - 22 febbraio 2011 - **CORREZIONE Fila B**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(1,2,3)$, $(2,3,4)$ e $(2,2,2)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R(t) = (2, 3\,t, 5\,t)$ e la retta $x+y=z=5$;

1.a.c. piano Π_3 tangente al grafico della funzione $z = x^2 - y^2 + 3$ nel punto $(1,1,5)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il piano Π_1 conterrá la direzione $(1,1,1) = (2,3,4) - (1,2,3)$ e la direzione $(1,0,-1) = (2,2,2) - (1,2,3)$ ed é quindi ortogonale al vettore $(1,-2,1)$. Quindi $(1,-2,1)\cdot(x,y,z) = (1,-2,1)\cdot(1,2,3)$, ossia $x - 2y + z = 0$, é equazione che caratterizza il piano Π_1. Verificare per credere.

Se il piano Π_2 contiene la retta $x+y=z=5$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $x+y=5$ e $z=5$, ossia $\alpha x + \alpha y + \beta z = 5(\alpha+\beta)$. Poiché $z=5$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $x + y + \beta z = 5 + 5\beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta $R(t) = (2, 3\,t, 5\,t)$, che comporta $2 + 3\,t + 5\,\beta t = 5 + 5\beta$, da cui $\beta = -\frac{3}{5}$. É poi possibile verificare che il piano $x + y - \frac{3}{5}z = 2$, o se preferiamo $5\,x + 5\,y - 3\,z = 10$, contiene effettivamente ambo le rette.

Le derivate parziali della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ nel punto $(1,1)$ valgono 2 e -2. Quindi l'equazione del piano tangente il grafico della f nel punto $(1,1,5)$ é $z - 5 = 2(x-1) - 2(y-1)$, o piú semplicemente $2x - 2y - z + 5 = 0$.

I tre piani sono in posizione generica tra di loro.

Π_1: $x - 2y + z = 0$

Π_2: $5\,x + 5\,y - 3\,z = 10$

Π_3: $z = 5 + 2x - 2y$

Π_1 (G) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Dati i 3 vettori:

$$v_1 : (\alpha, \alpha, \alpha - \beta) \qquad v_2 : (1, \alpha^2, \alpha - 2\beta) \qquad v_3 : (0,1,1)\,,$$

si determini per quali valori di α e β:

1.) v_1 e v_2 sono paralleli;

2.) v_1 e v_3 sono ortogonali;

3.) v_1, v_2 e v_3 sono coplanari.

Affinchè v_1 sia parallelo a v_2 le prime due componenti di questi vettori devono essere proporzionali: otteniamo $\alpha : 1 = \alpha : \alpha^2$, ossia $\alpha^2 = 1$, da cui $\alpha = \pm 1$. Se $\alpha = 1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere identici (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\beta = 0$ (dalla terza componente). Se $\alpha = -1$ allora per essere paralleli i due vettori devono essere opposti (si osservi la prima o la seconda componente) e quindi $\alpha - \beta = -(\alpha - 2\beta)$ (per la terza componente) da cui $\beta = \frac{2}{3}\alpha = -\frac{2}{3}$.

Il prodotto scalare $v_1 \cdot v_3 = \alpha + (\alpha - \beta)$ si annulla per $\beta = 2\alpha$, dove si ha l'ortogonalità tra i vettori.

Il prodotto triplo

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha & \alpha & \alpha-\beta \\ 1 & \alpha^2 & \alpha - 2\beta \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right\| = \alpha^3 + (\alpha - \beta) - \alpha - \alpha(\alpha - 2\beta) = \beta(2\alpha - 1) + \alpha^3 - \alpha^2 \,.$$

si annulla ogniqualvolta $\beta = \frac{\alpha^3 - \alpha^2}{1 - 2\alpha}$ (ha senso per $\alpha \neq \frac{1}{2}$). L'annullamento del prodotto triplo denuncia la coplanarità tra i tre vettori.

1.) v_1 e v_2 paralleli: per $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, -\frac{2}{3})$
2.) v_1 e v_2 ortogonali: per $\beta = 2\alpha$
3.) v_1, v_2 e v_3 coplanari: per $\beta = \frac{\alpha^3-\alpha^2}{1-2\alpha}$ (con $\alpha \neq \frac{1}{2}$) 1+1+2/30

1.c. Trovare un'equazione parametrica per la retta R incidente ortogonalmente sia nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x - 2\,y - 2\,z = 100$ e centro in $(1, 1, 1)$ che nel piano $x + y + z = 0$.

La retta R passerà per il centro $(1, 1, 1)$ della sfera, e la sua direzione sarà espressa dal vettore dei coefficienti direttori del piano $(1, 1, 1)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (1+t, 1+t, 1+t)$. Si noti che la retta passa per l'origine e quindi la scrittura $R(t) = (t, t, t)$, piú semplice, é preferibile.

$R(t) = (t, t, t)\,.$ 3/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta R_1 di equazioni $3y + 2z = 0$ e $y = 2x$ e la retta $R_2 = (1 - 2\,t, t - 1, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = t$ risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come $R_1(t) = (t, 2\,t, -3\,t)$. Risulta ora evidente che la retta R_1 di direzione $(1, 2, -3)$ e la retta R_2 di direzione $(-2, 1, 1)$ non sono parallele. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0, 0, 0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo

$t = 0$) e sia $P_2 = (1, -1, 2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\cdot(P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\cdot(1,-1,2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune (distanza non nulla).

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F:

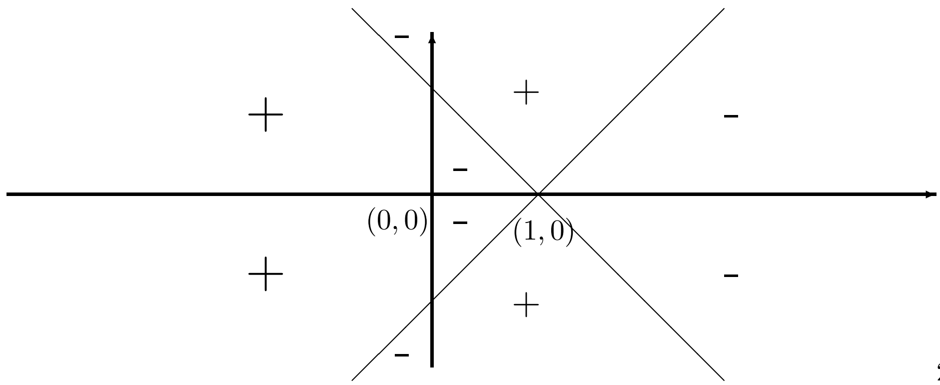
$F(x,y) =$

$$\begin{array}{rcl}
F(x,y) = & x\,y^2 - x^3 - x + 2\,x^2 & \text{come data} \\
= & x(y^2 - x^2 - 1 + 2\,x) & \text{raccogliamo la } x \\
= & x(y^2 - (x-1)^2) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
= & x\,(y - (x-1))(y + (x-1)) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\
= & x\,(y - x + 1)(y + x - 1)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x\,(y-x+1)(y+x-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(y - x + 1)$ o $(y + x - 1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 1 - x \vee y = -1 + x\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} y^2 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 &= 0 \\ 2\,xy &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $(0, \pm 1)$, $(1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, \pm 1)$ e $(1, 0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xh}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\,x + 4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} -6\,x + 4 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}_{\left(\frac{1}{3}, 0\right)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}\right) = \frac{4}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{1}{3}, 0\right) > 0$ ne consegue che $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è punto di minimo locale. In effetti un tale minimo doveva essere presente nel triangolo delle Bermude evidenziato dallo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerato che $F(x, -y) = F(x, y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, \pm 1)$, $(1, 0)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

I punti $(0, \pm 1)$ e $(1, 0)$ sono selle.

Il punto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ è un minimo locale.

5/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$.

Poichè $F(0,0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0,0)\cdot(x-0) + F_y(0,0)\cdot(y-0) = -x$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:
$z = 0 + F_x(0,0)\cdot(x-0) + F_y(0,0)\cdot(y-0) = -x$
1/30

3. Si determinino la lunghezza L e l'ascissa curvilinea $\ell(t)$ della spirale $\overline{s}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 4\pi$. Si riparametrizzi la spirale in modo che, al variare di t, essa venga percorsa con velocitá unitaria in ogni suo punto.

Derivando $\overline{s}(t)$ otteniamo l'espressione della velocitá come vettore in funzione del tempo: $\overline{v}(t) = \overline{s}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \le t \le 4\pi$. Ora, per quanto riguarda l'ascissa curvilinea all'istante t, ossia la strada percorsa lunga la spirale dall'istante $t_0 = 0$ all'istante t, avremo:

$$\ell(t) = \int_0^t |\overline{v}(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\,dt = \int_0^t \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,t$$

Si noti, incidentalmente, che la spirale viene percorsa a velocitá costante $v(t) = |\overline{v}(t)| = 2$. La lunghezza totale della pirale vale $L = \ell(4\pi) = 4\sqrt{2}\,\pi$. Volendo riparametrizzare, si inverta $\ell(t) = \sqrt{2}\,t$ in $t(\ell) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$, per poi sostituire tramite essa la t in $\overline{s}(t)$:

$$\overline{s}(t(\ell)) = (\cos t, \sin t, t) = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \sin\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right) \quad 0 \le \ell \le 4\sqrt{2}\,\pi.$$

$\ell(t) = \sqrt{2}\,t$
2/30

$L = 4\sqrt{2}\,\pi$
3/30

$\overline{s}(t') = \left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t', \sin\frac{\sqrt{2}}{2}t', \frac{\sqrt{2}}{2}t'\right) \qquad 0 \le t' \le 4\sqrt{2}\,\pi$
3/30