Prova scritta di Matematica II - 28 febbraio 2008 - **CORREZIONE Fila C**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1.a. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(\sqrt{13}, \sqrt{11}, \sqrt{17})$, $(\sqrt{11}, 7, \sqrt{17})$ e $(7, \sqrt{13}, \sqrt{17})$;

1.a.b. piano Π_2 contenente le rette $R_1(t) = (1-t, 1+t, t+3)$ e $R_2(s) = (1, 1, s+5)$;

1.a.c. piano Π_3 costituito dai punti equidistanti da $(0,0,0)$ e $(4,-4,0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Tutti e tre i punti sono a quota $\sqrt{17}$, e pertanto l'equazione di Π_1 è $z = \sqrt{17}$.

La retta R_2 è la retta verticale intersecante il piano xy nel punto $(1,1,0)$. Siamo pertanto indotti a trascurare la terza coordinata della retta R_1, considerando piuttosto la retta $R_1'(t) = (1-t, 1+t, 0)$ che ne rappresenta l'ombra sul piano xy. Infatti, dato che Π_1 contiene una retta verticale, la z non dovrà allora apparire nell'equazione di Π_1, la quale coinciderà quindi con l'equazione della retta $(1-t, 1+t)$ nel piano xy, ossia con l'equazione $x+y=2$. Consiglio: si verifichi il contenimento di $R_1(t) = (1-t, 1+t, t+3)$ e $R_2(s) = (1, 1, s+5)$.

I punti $(0,0,0)$ e $(4,-4,0)$ sono entrambi a quota 0 (ossia sul pavimento), e pertanto la terza coordinata sarà irrilevante anche per il piano Π_3. In effetti $(4,-4,0)-(0,0,0)$, che esprime la direzione della normale al piano, più efficacemente espressa da $(1,-1,0)$, si annulla nella terza componente. Il passaggio obbligato per $(2,-2,0)$ ci consegna l'equazione $x - y = 4$.

La relazione geometrica tra i piani Π_1, Π_2 e Π_3 è la relazione tra i vettori ad essi normali $(0,0,1)$, $(1,1,0)$ e $(1,-1,0)$. La mutuale ortogonalità di questi 3 vettori può essere verificata controllando la nullità di ciascuno dei 3 prodotti scalari.

Π_1: $z = \sqrt{17}$	Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1
Π_2: $x + y = 2$	
Π_3: $x - y = 4$	1+1+1+2/30

1.b. Per quali valori di α e β la distanza tra coppie dei seguenti piani si annulla:

$$\Pi_1 : x + \alpha\, y + z = \beta + \sqrt{7} \qquad \Pi_2 : 2\,x + 3\,y + 2\,z = 0 \qquad \Pi_3 : \alpha\, x + y + \beta\, z = 2\,.$$

La distanza tra 2 piani è sempre nulla, eccetto quando essi siano paralleli e distinti.

Il parallellismo tra Π_1 e Π_2 si ha per $\alpha = \frac{3}{2}$, tuttavia Π_1 e Π_2 coincidono per $\beta = -\sqrt{7}$.

Il parallellismo tra Π_1 e Π_3 si ha per $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ e per $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$, ed in entrambi i casi i piani sono poi distinti.

Il parallellismo tra Π_2 e Π_3 si ha per $(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, e per questi valori dei parametri i piani sono poi distinti.

1.) $d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$: per $\alpha \neq \frac{3}{2}$, o $\beta = -\sqrt{7}$
2.) $d(\Pi_1, \Pi_3) = 0$: sempre, eccetto $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ e $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$
3.) $d(\Pi_2, \Pi_3) = 0$: sempre, eccetto $(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
1+1+1/30

1.c. Calcolare la distanza tra il punto $P = (1, 2, 3)$ e la retta di equazioni $x + y + z = 1$ e $x - y = 0$.

Ponendo $y = t$ otteniamo una scrittura parametrica della retta: $R(t) = (t, t, 1 - 2\,t)$. Risulta ora evidente che la retta ha direzione $(1, 1, -2)$. Poichè le altezze cadono ortogonali, risulta utile individuare il piano passante per P ed ortogonale alla retta: $(1, 1, -2) \cdot (x, y, z) = (1, 1, -2) \cdot (1, 2, 3)$, ossia $x + y - 2\,z = -3$. Tale piano interseca la retta nel punto determinato da quel t che soddisfa $x(t) + y(t) - 2\,z(t) = -3$, ossia $t + t - 2\,(1 - 2\,t)) = -3$, da cui $t = -\frac{1}{6}$. La distanza di $P = (1, 2, 3)$ dalla retta $R(t)$ coincide con la distanza di $(1, 2, 3)$ da $R\left(-\frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$, ossia con la lunghezza del vettore v che esprime lo spostamento da $R\left(-\frac{1}{6}\right)$ a $P = (1, 2, 3)$. Quindi $v = \left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}, \frac{10}{6}\right)$ e $|v| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \left(\frac{10}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{318}}{6}$. Il fatto che v sia ortogonale alla direzione della retta (facile da verificarsi con un semplice prodotto scalare) conferma che non dovrebbero essere stati commessi errori.

Un percorso alternativo poteva essere quello di calcolarsi la norma del prodotto vettoriale tra il versore $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ esprimente la direzione della retta ed il vettore spostamento da P ad un qualsiasi punto della retta. Ad esempio, il vettore spostamento da $R(0) = (0, 0, 1)$ a P è $(1, 2, 2)$ il cui prodotto vettoriale col versore è $\frac{1}{\sqrt{6}}(6, -4, 1)$, la cui norma è $\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{318}}{6}$.

$d(R, P) = d\left(\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right), P\right) = \frac{\sqrt{318}}{6}$.
2/30

1.d. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (1, 1, 1 + t)$ e la retta R_2 di equazioni $y = \sqrt{5}$ e $z = x + 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 è contenuta nel piano $y = 1$, mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $y = \sqrt{5}$, parallelo a $y = 1$ ed a distanza $\sqrt{5} - 1$ da esso. La distanza tra R_1 ed R_2 è quindi non inferiore a $\sqrt{5} - 1$. I punti $R_1(1) = (1, 1, 2)$ di R_1 e $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 distano proprio $\sqrt{5} - 1$ confermando questo come valore di distanza tra le 2 rette.

Le due rette sono sghembe poichè il piano $x = 1$ contiene tutta R_1 ed anche il punto $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 ma non riesce a contenere tutta R_2 (non contiene ad esempio il punto $(0, \sqrt{5}, 1)$ di R_2).

$d(R_1, R_2) = \sqrt{5} - 1$.
Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = xy\,(x^2 - 2\,y^2) + x\,y^3$.

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

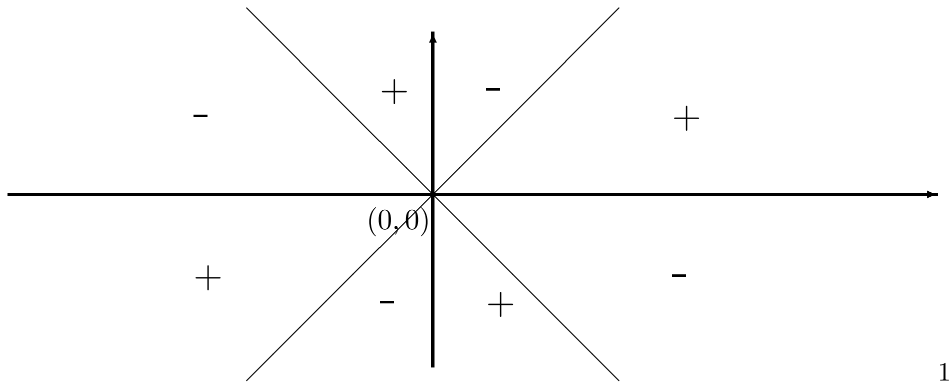
Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F operando nelle tre solite fasi (sviluppare, semplificare, raccogliere):

$$\begin{array}{rcll} F(x,y) = & xy\,(x^2 - 2\,y^2) + x\,y^3 & \text{come data} \\ = & x^3\,y - 2\,x\,y^3 + x\,y^3 & \text{sviluppata} \\ = & x^3\,y - x\,y^3 & \text{raccolti e riordinati i termini} \\ = & xy\,(x-y)\,(x+y)\,. & \text{raccolta, fattorizzata} \end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = xy\,(x-y)\,(x+y)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o y o $(x-y)$ o $(x+y)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 0 \vee x = \pm y\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 8 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 3\,x^2 y - y^3$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 - 3\,xy^2$ e dobbiamo ricercare i punti (x,y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} 3\,x^2 y - y^3 &= 0 \\ x^3 - 3\,xy^2 &= 0 \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. Chiaramente $(0,0)$ è soluzione e quindi punto stazionario (come evidente anche dallo studio del segno). Inoltre, in ogni soluzione (x,y) in cui sia nulla una coordinata deve necessariamente annullarsi anche l'altra. Le ulteriori soluzioni, ove presenti, sono pertanto tutte espresse dal sistema semplificato sotto le assunzioni $x, y \neq 0$, ossia:

$$\begin{cases} 3\,x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 - 3\,y^2 &= 0 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni otteniamo $x^2 = y^2$, che combinata con la prima equazione porta a concludere $x = 0$ in contraddizione con quanto ormai assunto. Abbiamo pertanto un solo punto stazionario: il punto $(0,0)$. Si noti che $F(0,0) = 0$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0,0)$ è punto di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:
PUNTI STAZIONARI: $(0,0)$.
L'origine $(0,0)$ è punto di sella. 3/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0,0,0)$.

Poichè $(0,0)$ è punto stazionario, ne consegue che il piano ivi tangente è orizzontale.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0,0,0)$:
$z = 0$ 2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $x^2 + y^2 \leq 9$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il bordo del cerchio $x^2 + y^2 = 9$, e pertanto li ricerchiamo con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema.

$$\begin{cases} 3\,x^2 y - y^3 &= F_x = \lambda g_x = & 2\,\lambda\,x \\ x^3 - 3\,xy^2 &= F_y = \lambda g_y = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 &= g(x,y) = & 9\,. \end{cases}$$

Per estrarre le soluzioni da un tale sistema conviene comunque sempre procedere con nozione di causa. Occorre prefigurarsi innanzittutto dove possano risiedere i punti estremali e quanti possano/debbano essere, e con quali simmetrie. Può sicuramente snellirci il lavoro avere delle intuizioni preliminari sul tipo di radici che possiamo aspettarci. Un primo studio sulla parità della funzione ci rivela che $F(x,-y) = F(x,y) = F(-x,y)$. Pertanto i punti estremali saranno accoppiati: se (x,y) è punto estremale allora anche $(x,-y)$ e $(-x,y)$ e $(-x,-y)$ saranno punti etremali. Quindi la x e la y dovrebbero entrare in gioco come x^2 ed y^2 dacché anche la regione assegnata é simmetrica per ribaltamento degli assi. (Essa è inoltre simmetrica per scambio degli assi, e vale $F(y,x) = -F(x,y)$. Questa più raffinata osservazione ci porterebbe ad individuare subito delle soluzioni semplicemente imponendo $x = y$). In effetti, se moltiplichiamo la prima equazione per y e la seconda per x, possiamo poi eguagliare i primi membri delle due equazioni ottenendo un equazione nelle sole potenze pari delle variabili: $3\,x^2y^2 - y^4 = x^4 - 3\,x^2y^2$, ossia $x^4 - 6\,x^2y^2 + y^4 = 0$. Combinando questa con l'equazione del vincolo $x^2 + y^2 = 9$ otteniamo un'equazione di secondo grado nella sola y^2: $8\,y^4 - 72\,y^2 + 81 = 0 = 8\,y^4 - 8\cdot 9\,y^2 + 9^2$, da cui

$$y^2 = \frac{8\cdot 9 \pm \sqrt{(8\cdot 9)^2 - 4\cdot 8\cdot 9^2}}{2\cdot 8} = \frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{4\cdot 8\cdot 9^2}}{2\cdot 8} = \frac{9}{2} \pm 9\,\frac{\sqrt{2}}{4} = 9\,\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}\,.$$

Quindi $y = \pm\sqrt{9\,\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}}$.

Vista la simmetria del sistema di 3 equazioni da cui siamo partiti rispetto allo scambio di variabili $x \leftrightarrow y$ (scambiando le variabili riottengo lo stesso sistema), per la x avremo esattamente lo stesso set di radici.

Ora, se consideriamo il 3 vincolo, vediamo che le coppie (x, y) che effettivamente risultano soluzioni sono 8 e piú precisamente i quattro punti $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$ ed i quattro punti $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)$.

È facile dedurre che questi 8 punti, uno per regione, sono tutti estremi (4 massimi e 4 minimi) almeno relativi. Di fatto, dalla valutazione del valore della F, segue che sono tutti estremi assoluti come da catalogazione riportata in tabella.

I 2 punti $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$ sono massimi assoluti con

$$\begin{aligned} F\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right) &= \sqrt{9\,\tfrac{2+\sqrt{2}}{4}}\cdot\sqrt{9\,\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}}\cdot\left(9\,\tfrac{2+\sqrt{2}}{4} - 9\,\tfrac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \tfrac{9}{2}\cdot\left(9\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \tfrac{81}{4}\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Lo stesso dicasi dei 2 punti $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}, \mp\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)$. Gli altri 4 punti sono invece minimi assoluti.

2.d)

4 Massimi Assoluti: $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$ e $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}, \mp\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)$ dove $F = \frac{81}{4}\sqrt{2}$

4 Minimi Assoluti: $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}, \pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\right)$ e $\left(\pm\sqrt{9\,\frac{2+\sqrt{2}}{4}}, \mp\sqrt{9\,\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$ dove $F = -\frac{81}{4}\sqrt{2}$

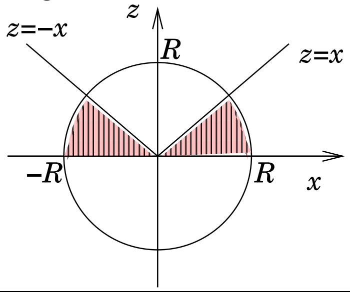
6/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \le z \le |x|$ e $x^2 + z^2 \le R^2$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 180^o attorno all'asse delle z.

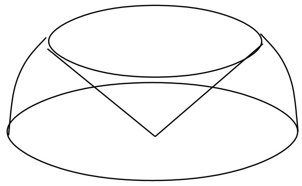
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);
3.b. Esprimere Q in coordinate cilindriche;
3.c. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate sferiche;
3.d. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;
3.e. Calcolare l'integrale triplo $I = \int_Q z \; dx\, dy\, dz$;
3.f. Fornire le coordinate del baricentro $B = (x_b, y_b, z_b)$ di Q;

La figura piana E è l'intersezione tra il disco di raggio R centrato nell'origine e la regione $0 \leq z \leq |x|$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate cilindriche

$$Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq z \leq \rho, \rho^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

1/30

c) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate sferiche

Car: $Q = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$

Sfe: $Q = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \leq \rho \leq R,\; \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate sferiche.

$$\begin{aligned}
V &= \int\int\int_Q \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi\, d\rho\, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^2 \; d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \; d\phi \right) \\
&= 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R [-\cos\phi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\,\pi\, R^3\, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, R^3\,.
\end{aligned}$$

d) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3$

4/30

Il computo di I è convenientemente affrontato allo stesso modo.

$$\begin{aligned} I &= \int\int\int_{Q_{sup}} \rho \cos\phi \rho^2 \sin\phi \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi \, d\rho \, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \; d\theta \right) \left(\int_0^R \rho^3 \; d\rho \right) \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi \right) \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[-\frac{\cos 2\phi}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi \frac{R^4}{4} (1 - 0) = \frac{1}{8} \pi R^4 \, . \end{aligned}$$

e) $I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \frac{\sin 2\phi}{2} \; d\phi \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{8} \pi R^4$

4/30

Data la simmetria rispetto all'asse delle zeta, e visto l'integrale appena sopra computato, le coordinate del baricentro saranno: $x_b = 0$, $y_b = 0$, e

$$z_b = \frac{I}{V} = \frac{\frac{1}{8} \pi R^4}{\frac{\sqrt{2}}{3} \pi R^3} = \frac{3\sqrt{2}}{16} R \, .$$

f) $x_b = 0$ $\quad$ $y_b = 0$ $\quad$ $z_b = \frac{I}{V} = \frac{3\sqrt{2}}{16} R$

2/30