Prova scritta di Matematica   5 luglio 2012 - CORREZIONE Fila B
c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (2+2pt) Trovare una forma chiusa per la ricorrenza

$$f(n) = \begin{cases} f(0) = 0; \\ f(n) = 7 + f(n-1). \end{cases}$$

e dimostrarne per induzione la correttezza.

forma chiusa e dimostrazione

FORMA CHIUSA: $f'(n) = 7\,n$.

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

BASE: vero per $n = 0$ in quanto $f(0) = 0 = 7 \cdot 0 = f'(0)$.
PASSO: verifico la corrispondenza per $n + 1$ assumendola per n:
$f'(n+1) = 7 + f'(n) = 7 + 7\,n = 7\,(n+1) = f'(n+1)$.

2+2/30

2. (8pt) Si calcoli $\int \frac{x^5+3\,x^4+x^3+5\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3}$.

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte. Come primo passo si rende il grado del numeratore non eccedente a quello del denominatore tramite divisione polinomiale. Dividendo il numeratore per il denominatore si scopre che $x^5 + 3\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 4 = x^2\,(x^3 + 3\,x^2 + x + 3) + 2\,x^2 + 4$.
Quindi

$$\int \frac{x^5 + 3\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 + 4}{x^3 + 3\,x^2 + x + 3} = \int x^2 + \int \frac{2\,x^2 + 4}{x^3 + 3\,x^2 + x + 3} = \frac{x^3}{3} + \int \frac{2\,x^2 + 4}{x^3 + 3\,x^2 + x + 3}\,,$$

A questo punto, come secondo (ed unico per il quale il metodo non sia effettivo) passo si cerca di fattorizzare il denominatore come polinomi di grado al piú due (cosa sempre fattibile in linea di principio per il teorema fondamentale dell'algebra). Speriamo di riuscirci ...
Oh, bene ... la regolaritá dei coefficienti é favorevole a un raccoglimento semplice (senza riporti):

$$x^3 + 3\,x^2 + x + 3 = (x+3)\,(x^2+1)\,.$$

A questo punto il teorema di Hermite garantisce che esistano dei valori A, B, e C tali che

$$\frac{2\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B\,x+C}{x^2+1}\,,$$

ed il prossimo passo consiste nel determinare questi valori. La macchina per compierlo consiste nella soluzione del sistema che scaturisce dall'uguaglianza desiderata, ossia dall'identitá polinomiale:

$$2\,x^2+4=A\,(x^2+1)+(B\,x+C)\,(x+3)\,.$$

Otteniamo il sistema $A+B=2$, $C+3\,B=0$, $A+3\,C=4$, con soluzione $a=\frac{11}{5}$, $b=-\frac{1}{5}$, $c=\frac{3}{5}$, ossia

$$\frac{2\,x^2+4}{(x+3)\,(x^2+1)}=\frac{11}{5}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\frac{x-3}{x^2+1}\,,$$

e quindi

$$\int\frac{x^5+3\,x^4+x^3+5\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3}=\frac{x^3}{3}+\int\frac{2\,x^2+4}{(x+3)\,(x^2+1)}=\frac{x^3}{3}+\frac{11}{5}\int\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\int\frac{x-3}{x^2+1}\,,$$

dove si apprezzi come ha lavorato bene la linearitá dell'integrale nello sminuzzare un problema in problemi piú piccoli.

Ora, $\int\frac{1}{x+3}=\log|x+3|$, mentre $\int\frac{x-3}{x^2+1}\,d\,x=\int\frac{x}{x^2+1}\,d\,x-\int\frac{3}{x^2+1}\,d\,x=\frac{1}{2}\int\frac{2\,x}{x^2+1}\,d\,x-3\int\frac{1}{x^2+1}\,d\,x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,d\,(x^2+1)-3\,arctg(x)=\frac{1}{2}\log|x^2+1|+-3\,arctg(x)$.

$\int \frac{x^5+3\,x^4+x^3+5\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3} = \int x^2 + \int \frac{2\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3} = \frac{x^3}{3} + \int \frac{2\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3}$

Fattorizzazione del denominatore e scomposizione di Hermite:

$\frac{2\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3} = \int \frac{2\,x^2+4}{(x+3)\,(x^2+1)} = \int \frac{11}{5}\frac{1}{x+3} - \int \frac{1}{5}\frac{x-3}{x^2+1} = \frac{11}{5}\int \frac{1}{x+3} - \frac{1}{5}\int \frac{x-3}{x^2+1}.$

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 2, di cui 1 immediato:

$\int \frac{1}{x+3} = \log|x+3|$

E l'altro 2 facilmente maneggiabile:

$\int \frac{x-3}{x^2+1}\,d\,x = \int \frac{x}{x^2+1}\,d\,x - \int \frac{3}{x^2+1}\,d\,x = \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,d\,x - 3\int \frac{1}{x^2+1}\,d\,x =$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,d\,(x^2+1) - 3\,arctg(x) = \frac{1}{2}\log|x^2+1| - 3\,arctg(x)$

Quindi $\int \frac{x^5+3\,x^4+x^3+5\,x^2+4}{x^3+3\,x^2+x+3} = \frac{x^3}{3} + \frac{11}{5}\log|x+3| - \frac{1}{10}\log|x^2+1| + \frac{3}{5}\,arctg(x).$

7/30

3. (1+2+2pt) Fornire esempi in cui le affermazioni seguenti non siano valide:

se $f(x)$ e $g(x)$ definite in x_0 allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ definita in x_0.

Con $f(x) = 1$, $g(x) = x$, e $x_0 = 0$.

Qui $f(x_0) = 1$ mentre $g(x_0) = 0$ e quindi $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ non é definita,

poiché non é definita la divisione per 0.

1/30

se $f(x)$ é ovunque continua e derivabile allora ha massimo e minimo su ogni aperto (a, b)

La funzione $f(x) = x$ é continua e derivabile ovunque.

Ma non ammette né massimo né minimo su alcun aperto (a, b).

2/30

se $\lim_{x \mapsto x_0} f(x)/g(x) = 3$ allora esiste $\lim_{x \mapsto x_0} f'(x)/g'(x)$

Con $f(x) = 3$ e $g(x) = 1$.

Qui $\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$,

Ma $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ non é definito per alcun x.

2/30

4. (4pt) Si calcoli:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4/30

5. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0}\frac{e^{\tan x}+\cos(\tan x)-\tan x-2}{\sin(2\,\tan x)^3}=$ Sostituendo 0 ad x otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Per semplificare, converrá applicare la sostituzione $t=\tan x\mapsto 0$

$$\lim_{t\mapsto 0}\frac{e^t+\cos(t)-t-2}{\sin(8\,t^3)}=\left(\lim_{t\mapsto 0}\frac{e^t+\cos(t)-t-2}{t^3}\right)\cdot\left(\lim_{t\mapsto 0}\frac{t^3}{\sin(8\,t^3)}\right)$$

Il secondo limite puó essere visto come $\lim_{8\,t^3\mapsto 0}\frac{\frac{1}{8}(8\,t^3)}{\sin(8\,t^3)}=\frac{1}{8}$, sul primo conviene Taylor:

$$\cos(t)=1-\frac{1}{2}t^2+o(t^3),\ e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3)$$

pervenendo a $\lim_{t\mapsto 0}\frac{\frac{1}{6}t^3+o(t^3)}{t^3}=\frac{1}{6}$.

In conclusione, $\lim_{x\mapsto 0}\frac{e^{\tan x}+\cos(\tan x)-\tan x-2}{\sin(2\,\tan x)^3}=\left(\lim_{t\mapsto 0}\frac{e^t+\cos(t)-t-2}{t^3}\right)\cdot\left(\lim_{t\mapsto 0}\frac{t^3}{\sin(8\,t^3)}\right)=$
$=\left(\lim_{t\mapsto 0}\frac{\frac{1}{6}t^3+o(t^3)}{t^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{48}$. 5/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 ortogonale al piano $5\,x + 2\,y = 0$ e contenente uno dei tre assi coordinati;

1.a.b. piano Π_2 costituito dai punti equidistanti da $(10, 4, 4)$ e $(0, 0, 0)$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alle sfere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ e $(x - 8)^2 + (y + 6)^2 + z^2 \leq 25$ nel loro unico punto di contatto;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Il vettore normale al piano Π_1 deve risultare ortogonale a $(4, -3, 0)$ ed è quindi della forma $(3, 4, c)$. Il piano Π_1, dovendo contenere l'origine (comune a tutti e 3 gli assi coordinati), ha quindi equazione $3\,x+4\,y+c\,z = 0$. Pertanto $c = 0$ e l'asse contenuto è necessariamente quello delle z (caratterizzato dalle equazioni $x = 0$ e $y = 0$). In conclusione, Π_1 risulta caratterizzato dall'equazione $3\,x + 4\,y = 0$. $3\,x + 4\,y = 0$.

Il vettore $(8, -6, 6) - (0, 0, 0) = (8, -6, 6)$ risulta ortogonale al piano Π_2 che ha quindi equazione $4\,x-3\,y+3\,z = d$. Il valore di d risulta determinato dalla condizione di passaggio per il punto medio $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{-6+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (4, -3, 3)$, ossia $d = (4, -3, 3) \cdot (4, -3, 3) = 34$.

Le sfere hanno centro in $C_1 = (0, 0, 0)$ e $C_2 = (8, 6, 0)$ rispettivamente. Entrambe le sfere hanno raggio $\sqrt{25} = 5$ e quindi, se hanno un unico punto di contatto, questo dovrà coincidere con il punto medio del segmento $\overline{C_1C_2}$, ossia $\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 3, 0)$. In effetti, dal teorema di Pitagora, e come da terna Pitagorica $3-4-5$, il punto $(4, 3, 0)$ dista 5 da entrambi i centri e resta così confermata la tangenza delle due sfere. Il piano Π_3 sarà ortogonale al raggio dall'origine verso il punto $(4, 3, 0)$ ed avrà equazione $(x, y, z)\cdot(4, 3, 0) = (4, 3, 0) \cdot (4, 3, 0)$ ossia $4\,x + 3\,y = 25$.

I piani Π_1 e Π_2 sono ortogonali, come evidenziato dall'annullamento del prodotto scalare $(3, 4, 0) \cdot (4, -3, 3) = 12 - 12 + 0 = 0$. Invece Π_3 è in relazione generica (nè ortogonale nè parallelo) sia con Π_1 che con Π_2. Vista l'ortogonalità tra Π_1 e Π_2, questa affermazione risulta verificata una volta verificato che Π_3 non è ortogonale nè a Π_1 nè a Π_2. In effetti, $(4, 3, 0) \cdot (3, 4, 0) = 24 \neq 0$ e $(4, 3, 0) \cdot (4, -3, 3) = 7 \neq 0$.

Π_1: $3\,x + 4\,y = 0$	Π_1 (H) Π_2 (G) Π_3 (G) Π_1
Π_2: $4\,x - 3\,y + 3\,z = 34$	
Π_3: $4\,x + 3\,y = 25$	1+1+1+2/30

1.b. Calcolare la distanza tra la retta $R(t) = (1 + t, t, 2\,t)$ ed il piano $x + y - z = 0$.

La direzione $(1, 1, 2)$ della retta R è in effetti ortogonale alla normale al piano $(1, 1, -1)$ e pertanto retta e piano sono paralleli. Basta quindi calcolare la distanza dal piano per uno qualsiasi dei punti della retta, come $R(0) = (1, 0, 0)$. Utilizzando la formula per la distanza punto/piano otteniamo $d(R, \Pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$d(R, \Pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (1, 1, 1 + t)$ e la retta R_2 di equazioni $y = \sqrt{5}$ e $z = x + 1$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 è contenuta nel piano $y = 1$, mentre la retta R_2 è contenuta nel piano $y = \sqrt{5}$, parallelo a $y = 1$ ed a distanza $\sqrt{5} - 1$ da esso. La distanza tra R_1 ed R_2 è quindi non inferiore a $\sqrt{5} - 1$. I punti $R_1(1) = (1, 1, 2)$ di R_1 e $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 distano proprio $\sqrt{5} - 1$ confermando questo come valore di distanza tra le 2 rette.

Le due rette sono sghembe poichè il piano $x = 1$ contiene tutta R_1 ed anche il punto $(1, \sqrt{5}, 2)$ di R_2 ma non riesce a contenere tutta R_2 (non contiene ad esempio il punto $(0, \sqrt{5}, 1)$ di R_2).

$d(R_1, R_2) = \sqrt{5} - 1\,.$

Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x, y) = yx^2 + 4\,x - 4\,y - x^3\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

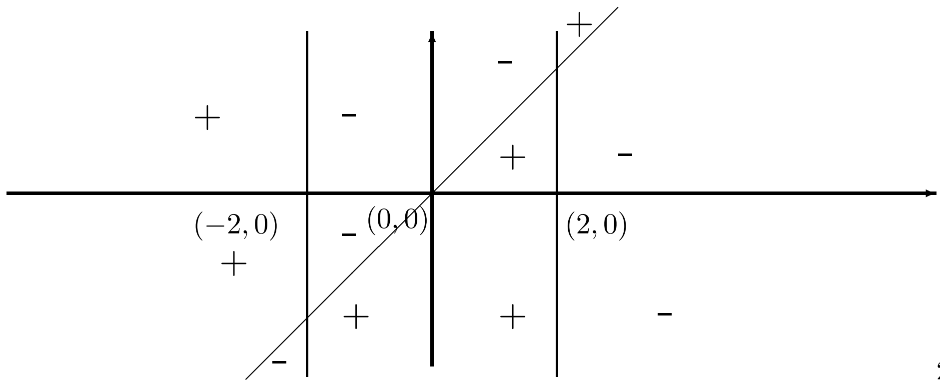
Raccogliendo y dai due termini in posizione dispari e $-x$ dai due termini in posizione pari, otteniamo la fattorizzazione:

$$F(x, y) = yx^2 + 4\,x - 4\,y - x^3 = y(x^2 - 4) - x(x^2 - 4) = (y - x)(x^2 - 4)\,.$$

Non é difficile a questo punto ultimare la fattorizzazione, ottenendo $F(x, y) = (y - x)(x + 2)(x - 4)$, da cui si evince lo studio del segno. Infatti, per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x, y) = (y - x)(x + 2)(x - 4)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulli $(y - x)$ o $(x + 2)$ o $(x - 2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \vee \vee x = \pm 2\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 4$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} -3\,x^2 + 2\,x\,y - 4 &= 0 \\ x^2 - 4 &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che $x = \pm 2$, ed i corrispondenti valori della y restano poi determinati dalla prima prima equazione. Otteniamo così i 2 punti stazionari: $(2, 2)$, $(-2, -2)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che essi sono entrambi punti di sella.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(2, 2)$, $(-2, -2)$.

I punti $(2, 2)$ e $(-2, -2)$ sono entrambi selle della F.

5/30

2.c. Determinare l'equazione del piano tangente il grafico di F nel punto $(0, 0, 0)$.

Poichè $F(0, 0) = 0$ il punto dato appartiene effettivamente al grafico della F. L'approssimazione lineare in quel punto sarà data da $z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$.

2.c) Equazione del piano tangente F in $(0, 0, 0)$:

$z = 0 + F_x(0, 0) \cdot (x - 0) + F_y(0, 0) \cdot (y - 0) = 4\,x - 4\,y$

2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nel quadrato Q di spigoli $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè tutti i punti stazionari della F sono risultati essere punti di sella, gli estremi di F saranno necessariamente situati sulla frontiera, ossia lungo il perimetro di Q. Lo studi del segno di cui al punto (a) restringe la nostra ricerca ai lati orizzontali, e vista la simmetria $F(-x,-y) = -F(x,y)$ ci si limita all'esame del bordo superiore, caratterizzato dall'equazione $y = 2$. Qui $F(x,y) = (y-x)(x^2-4) = 2\,x^2-x^3+4\,x-8$ e $F_x = 4\,x-3\,x^2+4$. Ponendo $F_x = 0$ otteniamo $x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}$. La radice $x = 2$ era scontata (e vale quindi a conferma/verifica) ma non è interessante. La soluzione interessante individua il punto di minimo assoluto $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$.

2.d) punti estremali di F in Q

1 Max Assoluto: $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$

1 Min Assoluto: $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$

4/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq \min\{x, 2R-x\}$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

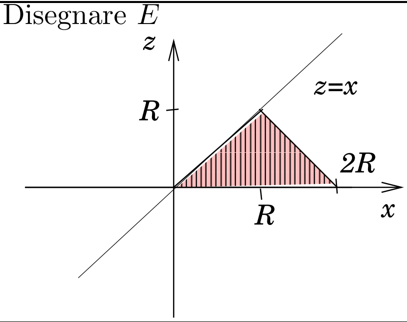
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

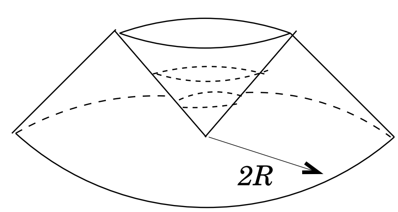
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione.

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, (R,R), e $(0,2R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \min\{\sqrt{x^2+y^2}, 2R - \sqrt{x^2+y^2}\}\right\}$

cil: $Q = \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \min\{\rho, 2R-\rho\}\right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$V = \int\int\int_Q \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R\int_z^{2R-z} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \left(\int_0^{R} \int_z^{2R-z} \rho \; d\rho\, dz\right) \\
&= 2\,\pi \int_0^{R} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_z^{2R-z} dz = 2\,\pi \int_0^{R} 2R^2 - 2Rz \; dz = 2\,\pi \; \left[2R^2 z - Rz^2\right]_0^R = 2\,\pi\, R^3\,.
\end{aligned}
$$

c)

$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \int_z^{2R-z} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta = 2\,\pi\, R^3$

4/30