Prova scritta di Matematica 13 giugno 2012 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (2+2pt) Trovare una forma chiusa per la ricorrenza

$$f(n) = \begin{cases} f(0) = 1; \\ f(n) = -2\,f(n-1) \text{ per ogni naturale } n \geq 1. \end{cases}$$

e dimostrarne per induzione la correttezza.

forma chiusa e dimostrazione

FORMA CHIUSA: $f'(n) = (-2)^n$.

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

BASE: vero per $n = 0$ in quanto $f(0) = 1 = (-2)^0 = f'(0)$.

PASSO: verifico la corrispondenza per $n+1$ assumendola per n:

$$f(n+1) = -2\,f(n) = -2\,f'(n) = -2\,(-2)^n = (-2)^{n+1} = f'(n+1).$$

2+2/30

2. (7pt) Si calcoli $\int \frac{x^4+5\,x^3+7\,x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x}$.

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte. Come primo passo si rende il grado del numeratore non eccedente a quello del denominatore tramite divisione polinomiale. Dividendo il numeratore per il denominatore si scopre che $x^4 + 5\,x^3 + 7\,x^2 + 2\,x + 4 = x\,(x^3 + 5\,x^2 + 6\,x) + x^2 + 2\,x + 4$.

Quindi

$$\int \frac{x^4 + 5\,x^3 + 7\,x^2 + 2\,x + 4}{x^3 + 5\,x^2 + 6\,x} = \int x + \int \frac{x^2 + 2\,x + 4}{x^3 + 5\,x^2 + 6\,x} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2 + 2\,x + 4}{x^3 + 5\,x^2 + 6\,x}\,,$$

A questo punto, come secondo (ed unico per il quale il metodo non sia effettivo) passo si cerca di fattorizzare il denominatore come polinomi di grado al piú due (cosa sempre fattibile in linea di principio per il teorema fondamentale dell'algebra). Speriamo di riuscirci ...

In questo caso ci riusciamo di sicuro perché il polinomio ha grado 3. Ma chi si ricorda il metodo per determinare le radici di un polinomio di grado 3 e si sente di giocarselo tutto? Wow, siamo fortunati: una radice ovvia é 0 e quindi il tutto si riduce ad un polinomio di grado 2 ossia alla soluzione di un problema di somma (5) e prodotto (6), la cui soluzione è data dalla coppia 2 e 3. Quindi questo polinomio, per chi lo conosca nell'intimo, altro non é che $x\,(x+2)\,(x+3)$. Muy bien: abbiamo portato a casa l'unico passo non scontato di questo processo generale di integrazione di polinomiali fratte.

$$x^3 + 5\,x^2 + 6\,x = x\,(x+2)\,(x+3)\,.$$

A questo punto il teorema di Hermite garantisce che esistano dei valori A, B e C tali che

$$\frac{x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x} = \frac{x^2+2\,x+4}{x\,(x+2)\,(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}\,,$$

ed il prossimo passo consiste nel determinare questi valori. La macchina per compierlo consiste nella soluzione del sistema che scaturisce dall'uguaglianza desiderata, ossia, fatto denominatore comune, dall'identitá polinomiale:

$$x^2+2\,x+4 = A\,(x^2+5\,x+6) + B\,(x^2+3\,x) + C\,(x^2+2\,x)\,.$$

Otteniamo $A=\frac{2}{3}$ dal confronto del termine noto, e quindi il sistema $B+C=1/3$ con $3\,B+2\,C=-4/3$, con soluzione $B=-2$ e $C=7/3$, ossia

$$\frac{x^2+2\,x+4}{x\,(x+2)\,(x+3)} = \frac{2}{3\,x} - \frac{2}{x+2} + \frac{7}{3\,(x+3)}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x}\,d\,x = \int \frac{x^2+2\,x+4}{x\,(x+2)\,(x+3)}\,d\,x = \int \frac{2}{3\,x}\,d\,x - 2\int \frac{1}{x+2}\,d\,x + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x+3}\,d\,x\,,$$

dove si apprezzi come ha lavorato bene la linearitá dell'integrale nello sminuzzare un problema in problemi piú piccoli.
Ora, $\int \frac{2}{3\,x}\,d\,x = \frac{2}{3}\int\frac{1}{x}\,d\,x = \frac{2}{3}\log|x|$, mentre $\int\frac{1}{x+2}\,d\,x = \log|x+2|$, e $\int\frac{1}{x+3}\,d\,x = \log|x+3|$.

$\int \frac{x^4+5\,x^3+7\,x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x} = \int \frac{x\,(x^3+5\,x^2+6\,x)+x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x}$

Fattorizzazione del denominatore e scomposizione di Hermite:

$\int \frac{x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x} = \int \frac{x^2+2\,x+4}{x\,(x+2)\,(x+3)} = \int \frac{2}{3\,x} - \int \frac{2}{x+2} + \frac{7}{3} \int \frac{1}{x+3}.$

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 3 problemi del tipo:

$\int \frac{A}{(x+C)} = A \log|x+C|$

E quindi:

$\int \frac{2}{3\,x}\,d\,x = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x}\,d\,x = \frac{2}{3} \log|x|$

analogamente $\int \frac{1}{x+2}\,d\,x = \log|x+2|$, e $\int \frac{1}{x+3}\,d\,x = \log|x+3|$

Quindi $\int \frac{x^4+5\,x^3+7\,x^2+2\,x+4}{x^3+5\,x^2+6\,x} = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\log|x| - 2\,\log|x+2| + \frac{7}{3}\log|x+3|.$

7/30

3. (2+2pt) Fornire la definizione di limite (finito) di una successione a_n. Dimostrare che $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$, se esiste, é sempre unico.

definizione limite

Diremo che il limite $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ esiste e vale ℓ se

comunque venga fissato un valore $\varepsilon > 0$

esiste allora un naturale $N = N(\varepsilon)$ tale che

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

2/30

unicitá limite

Siano ℓ_1 ed ℓ_2 due valori per cui valga la proprietá definitoria di limite

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono N_1 ed N_2 tali che

$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\,\varepsilon$ per ogni $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

ma se $|\ell_1 - \ell_2|$ é piú piccolo di ogni valore positivo allora é nullo e $\ell_1 = \ell_2$.

2/30

4. (4pt) Si calcoli:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

4/30

5. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(e^{2\ \sin x}-1\right)(\cos(\sin x)-1)}{\sin^3 x} =$ Sostituendo 0 ad x otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Per semplificare, converrá applicare la sostituzione $t = \sin x \mapsto 0$

$$\lim_{t\mapsto 0} \frac{\left(e^{2\,t}-1\right)(\cos(t)-1)}{t^3} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\mapsto 0} \frac{e^{2\,t}-1}{2\,t}\right)\left(\lim_{t\mapsto 0} \frac{\cos(t)-1}{t^2}\right)$$

Il primo limite vale notoriamente 1.

Col secondo limite servono ora 2 applicazioni di Hopital oppure un Taylor:

ricordando $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, si ottiene $\lim_{t\mapsto 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)}{t^2} = -\frac{1}{2}$.

In conclusione, $\lim_{x\mapsto 0} \frac{\left(e^{2\ \sin x}-1\right)(\cos(\sin x)-1)}{\sin^3 x} = -\frac{1}{4}$.

5/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(0, \sqrt{3}, \pi)$, $(3, \sqrt{3}, \pi)$ e $(117, \pi, \sqrt{3})$;

1.a.b. piano Π_2 contenente la retta $R_1(t) = (t, 1, 1)$ e la retta R_2 di equazioni cartesiane $y = z = 117$;

1.a.c. il piano Π_3 costituito dai punti equidistanti dal punto $(3, 117, 117)$ e dal punto $(5, 117, 117)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

I primi due punti differiscono solo nella prima componente, da cui deduciamo che il piano Π_1 contiene la retta parallela all'asse delle x di equazione parametrica $(t, \sqrt{3}, \pi)$, e quindi incide ortogonalmente al piano yz. Concentriamoci sul determinare l'intersezione di Π_1 col piano yz sfruttando le condizioni di passaggio per gli ultimi due punti, ossia per $(\sqrt{3}, \pi)$ e $(\pi, \sqrt{3})$. Questi punti differiscono per lo scambio delle due coordinate, e quindi la somma delle coordinate $y + z$ é un invariante. L'equazione lineare ricercata é pertanto $y + z = \pi + \sqrt{3}$; essa non é solo l'equazione della retta di intersezione di Π_1 col piano yz nel piano yz, ma é anche l'equazione del piano Π_1 nello spazio.

Entrambe le rette incidono ortogonalmente al piano yz, sono quindi parallele, e quindi esiste un piano che le contenga entrambe. La visione geometrica porta ad individuare in $y = z$ l'equazione del piano. La verifica del contenimento delle due rette é immediata. Sempre la visione geometrica ci dice immediatamente che i piani Π_1 e Π_2 sono ortogonali, cosa che per altro trova riscontro immediato nell'annullamento del prodotto scalare $(0, 1, 1) \cdot (0, 1, -1)$ dei vettori dei coefficienti direttori.

Il piano Π_3 ha equazione $x = 4$ ed é ortogonale sia a Π_1 che a Π_2.

Π_1: $y + z = \sqrt{3} + \pi$

Π_2: $y = z$

Π_3: $x = 4$

Π_1 (H) Π_2 (H) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R che contenga un diametro della sfera $x^2 - 6x + y^2 + z^2 = -8$ e sia parallela alla retta di equazione $R'(t) = (\pi + t, \sqrt{17}, \sqrt{3} + \pi t)$.

La direzione della retta R coincide con la direzione $(1, 0, \pi)$ della retta R'. Per catturare la retta R basterebbe quindi individuare un punto di passaggio. In effetti, sappiamo che R passa per il centro della sfera $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 1$, ossia per il punto $(3, 0, 0)$. L'equazione parametrica è quindi $R(t) = (3, 0, 0) + (1, 0, \pi)\, t = (3 + t, 0, \pi\, t)$.

$R(t) = (3 + t, 0, \pi\, t)\,.$

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra la retta $R_1(t) = (2t, 4t, -6t)$ e la retta $R_2 = (1 - 2t, t - 1, 2 + t)$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

La retta R_1 ha direzione $(1,2,-3)$ mentre la retta R_2 ha direzione $(-2,1,1)$. Il versore $\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia $P_1 = (0,0,0)$ un qualsiasi punto della retta R_1 (ottenuto ponendo $t = 0$) e sia $P_2 = (1,-1,2)$ un qualsiasi punto della retta R_2 (ottenuto ponendo $t = 0$). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\cdot(P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)\cdot(1,-1,2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

Le rette sono quindi sghembe poichè non sono parallele e non hanno punti in comune.

$d(R_1, R_2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$ Le rette R_1 ed R_2 sono sghembe. 2+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = x\,y^2 - x^3 - 4\,x + 4\,x^2\,.$

2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzittutto la scrittura della F:

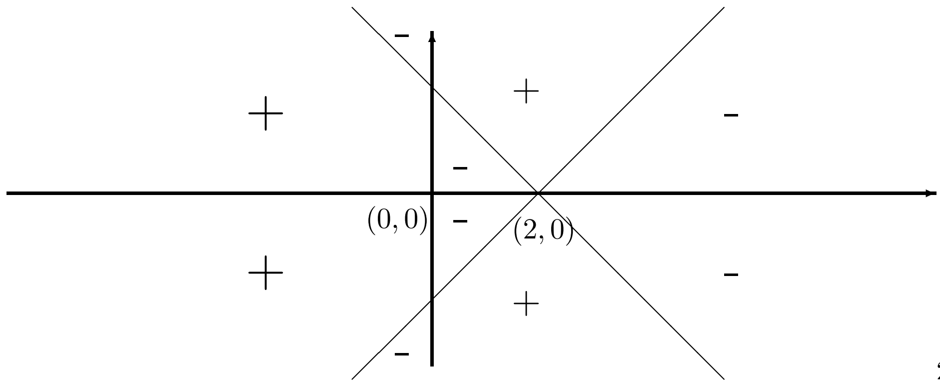
$F(x,y) =$

$$\begin{array}{rcl}
F(x,y) = & x\,y^2 - x^3 - 4\,x + 4\,x^2 & \text{come data} \\
= & x(y^2 - x^2 - 4 + 4\,x) & \text{raccogliamo la } x \\
= & x(y^2 - (x-2)^2) & \text{prodotto notevole } (a-b)^2 \\
= & x\,(y - (x-2))(y + (x-2)) & \text{prodotto notevole } a^2 - b^2 \\
= & x\,(y - x + 2)(y + x - 2)\,. & \text{già fattorizzata}
\end{array}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x\,(y-x+2)(y+x-2)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla x o $(y-x+2)$ o $(y+x-2)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee y = 2 - x \vee y = -2 + x\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 7 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa.

Il segno con cui labellare ciascuna regione risulta determinato dalle 4 regole della serie "piú per piú = piú". In questo caso, poichè non vi sono radici multiple, le etichette riportanti i segni si alternano.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



2/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della F si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = y^2 - 3\,x^2 + 8\,x - 4$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy$ e dobbiamo ricercare i punti (x, y) che soddisfano al sistema

$$\begin{cases} y^2 - 3\,x^2 + 8\,x - 4 &= 0 \\ 2\,xy &= 0\,, \end{cases}$$

ossia di annullamento del gradiente. La seconda equazione ci dice che dovrà essere nulla la x oppure la y. Procedendo sui due casi si determinano 4 punti stazionari: $(0, \pm 2)$, $(2, 0)$ e $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Dallo studio del segno della F di cui al punto (a) é facile dedurre che $(0, \pm 2)$ e $(2, 0)$ sono punti di sella. Per determinare la natura del punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ possiamo provare con il test delle derivate seconde, andando ad osservare il segno del determinante della matrice Hessiana

$$\begin{bmatrix} F_{xx}(x, y) & F_{xh}(x, y) \\ F_{yx}(x, y) & F_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\,x + 8 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

valutata nel punto critico $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Il segno di

$$Det\left(\begin{bmatrix} -6\,x + 8 & 2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}_{\left(\frac{2}{3}, 0\right)}\right) = Det\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4/3 \end{bmatrix}\right) = \frac{16}{3}$$

è positivo. Poichè $F_{xx}\left(\frac{2}{3}, 0\right) > 0$ ne consegue che $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ è punto di minimo locale. In effetti un tale minimo doveva essere presente nella regione triangolare delimitata con lo studio di Σ_0; e il punto reperito risulta anche ben collocato (sull'asse delle x) considerata la simmetria $F(x, -y) = F(x, y)$.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: $(0, \pm 2)$, $(2, 0)$ e $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

I punti $(0, \pm 2)$ e $(2, 0)$ sono selle.

Il punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ è un minimo locale.

5/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani $\Pi_{(0,2)}$, $\Pi_{(0,0)}$ e $\Pi_{(2,0)}$, dove, per $P=(0,2),(0,0),(2,0)$, Π_P è il piano tangente il grafico di F nel punto P;

Chiaramente, il punto $(P, F(P))$ appartiene al grafico della F per definizione stessa del concetto di grafico di funzione. Tutti e tre i punti appartengono a Σ_0, e quindi i tre piani hanno equazioni del tipo

$$z = F_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)\,.$$

Di fatto, essendo i punti $(2,0)$ e $(0,2)$ dei punti stazionari, i piani $\Pi_{(2,0)}$ e $\Pi_{(0,2)}$ saranno orizzontali. In entrambi i casi si tratta del piano $z=0$, visto che i due punti appartengono a Σ_0.

Per $\Pi_{(0,0)}$ l'equazione diviene

$$z = F_x(0,0)\,x + F_y(0,0)\,y = -4\,x\,.$$

Quanto ora trovato trova corrispondenza con le informazioni provenienti dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani $\Pi_{(0,2)}$, $\Pi_{(0,0)}$ e $\Pi_{(2,0)}$:		
$\Pi_{(0,2)}$: $z=0$	$\Pi_{(0,0)}$: $z=-4\,x$	$\Pi_{(2,0)}$: $z=0$
		2/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $Q = Q = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0\le x\le 4, -2\le y\le 2\;\right\}$.

La F, essendo continua, dovrá necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa e limitata. Poichè l'analisi dei punti stazionari della F ci ha consegnato un unico punto estremale (il minimo locale $\left(\frac{2}{3},0\right)$), gli eventuali massimi assoluti su Q sono necessariamente situati sul bordo (dallo studio del segno, sui lati orizzontali del quadrato Q; un punto per lato perfettamente gemellati vista la simmetria $F(x,-y)=F(x,y)$), mentre il minimo assoluto si trova o nel minimo locale $\left(\frac{2}{3},0\right)$ oppure sul bordo (dallo studo del segno, sul bordo destro di Q).

Fissato $y=\pm 2$, $F(x,y) = x\,y^2 - x^3 - 4\,x + 4\,x^2 = -x^3 + 4\,x^2 = f(x)$ con $f'(x) = -3\,x^2 + 8\,x$ che si annulla in $x=0$ ed in $x=\frac{8}{3}<4$. Quindi i due punti gemelli $\left(\frac{8}{3},\pm 2\right)$ sono i due punti di massimo assoluto (nonché unici massimi locali) in Q. Fissato $x=4$, $F(x,y) = x\,y^2 - x^3 - 4\,x + 4\,x^2 = 4\,y^2 - 16$ che, come da attendersi da studio del segno e simmetrie, é minima per $y=0$. Quindi $(4,0)$ é un minimo locale in Q con $F(4,0)=-16$. Siccome $F\left(\frac{2}{3},0\right) = -\frac{32}{27} > -16$ ne concludiamo che $(4,0)$ é un minimo assoluto in Q mentre $\left(\frac{2}{3},0\right)$ é solo minimo relativo in Q.

2.d)

2 Max Assoluti: $\left(\frac{8}{3}, \pm 2\right)$

1 Min Assoluto: $(4,0)$ con $F(4,0) = -16$

1 Min Locale: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ con $F\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{32}{27}$

1 Min Assoluto: $(4,0)$

5/30

3. In un riferimento Cartesiano x, y, z sia E la parte del piano $y = 0$ descritta dalle disequazioni $0 \leq z \leq x \leq R$, e sia Q il solido che si ottiene facendo ruotare E di 360^o attorno all'asse delle z.

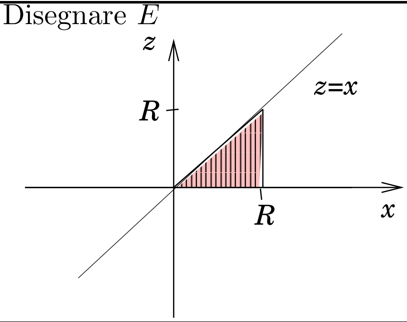
3.a. Disegnare sia E (sulla sinistra) che Q (sulla destra);

3.b. Esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche;

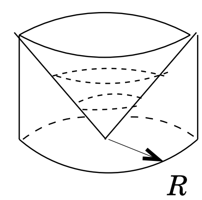
3.c. Calcolare il volume di Q mediante integrazione;

La figura piana E è il triangolo di vertici $(0,0)$, (R,R), e $(0,R)$.

a.1) Disegnare E



a.2) Disegnare Q



1+1/30

b) esprimere Q in coordinate Cartesiane e in coordinate cilindriche

Car: $Q = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R \} \right\}$

cil: $Q = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq \rho \leq R \right\}$

1+1/30

Per il computo del volume V di Q conviene riferirsi alle coordinate cilindriche.

$$
\begin{aligned}
V &= \int\!\!\int\!\!\int_Q \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\rho \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R \rho \int_0^\rho 1 \, dz \, d\rho \right) = 2\,\pi \int_0^R \rho \, [z]_0^\rho \, d\rho \\
&= 2\,\pi \int_0^R \rho^2 \, d\rho = 2\,\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^R = \frac{2}{3}\,\pi\, R^3 \,.
\end{aligned}
$$

c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \int_0^{\rho} \rho \; dz \, d\rho \, d\theta = \frac{2}{3} \pi R^3$

4/30