Prova scritta di Matematica   14 febbraio 2012 - CORREZIONE Fila B

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (2+2pt) Trovare una forma chiusa per la ricorrenza

$$f(n) = \begin{cases} f(0) = 0; \\ f(n) = n + f(n-1). \end{cases}$$

e dimostrarne per induzione la correttezza.

forma chiusa e dimostrazione

FORMA CHIUSA: $f(n) = \frac{n\,(n+1)}{2}$.

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

BASE: vero per $n = 0$ in quanto $0\,(0+1) = 0$.

PASSO: verifico la corrispondenza per $n+1$ assumendola per n:

$$f(n+1) = (n+1) + f(n) = (n+1) + \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{2\,(n+1) + n\,(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}.$$

2+2/30

2. (8pt) Si calcoli $\int \frac{x^6+6\,x^4+11\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x}$.

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte. Come primo passo si rende il grado del numeratore non eccedente a quello del denominatore tramite divisione polinomiale. Dividendo il numeratore per il denominatore si scopre che $x^6 + 6\,x^4 + 11\,x^2 + 4 = x\,(x^5 + 6\,x^3 + 9\,x) + 2\,x^2 + 4$.

Quindi

$$\int \frac{x^6 + 6\,x^4 + 11\,x^2 + 4}{x^5 + 6\,x^3 + 9\,x} = \int x + \int \frac{2\,x^2 + 4}{x^5 + 6\,x^3 + 9\,x} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2\,x^2 + 4}{x^5 + 6\,x^3 + 9\,x},$$

A questo punto, come secondo (ed unico per il quale il metodo non sia effettivo) passo si cerca di fattorizzare il denominatore come polinomi di grado al piú due (cosa sempre fattibile in linea di principio per il teorema fondamentale dell'algebra). Speriamo di riuscirci ...

Siamo fortunati, il polinomio a denominatore, benché di quinto grado (e quindi giá non esiste un metodo generale per determinarne le radici) ha peró termine noto nullo, ossia x=0 ne é una radice e possiamo quindi raccogliere la x come prima fattorizzazione rimanendo con un polinomio di quarto grado che ha quel punto é sicuramente gestibile. In questo caso, dopo aver raccolto la x, mi restano solo le potenze pari, e quindi posso vederlo come un polinomio di grado dimezzato $\frac{4}{2} = 2$ che puó essere sempre risolto con la formula del delta. Ma la fattorizzazione risulta evidente di suo se ci si é creati quell'attimo di dimestichezza consigliabile coi prodotti notevoli.

$$x^5 + 6\,x^3 + 9\,x = x\,(x^4 + 6\,x^2 + 9) = x\,(x^2+3)^2\,.$$

A questo punto il teorema di Hermite garantisce che esistano dei valori A, B, C, D ed E tali che

$$\frac{2\,x^2+4}{x\,(x^2+3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2+3} + \frac{D\,x+E}{(x^2+3)^2}\,,$$

ed il prossimo passo consiste nel determinare questi valori. La macchina per compierlo consiste nella soluzione del sistema che scaturisce dall'uguaglianza desiderata, ossia dall'identitá polinomiale:

$$2\,x^2 + 4 = A\,(x^2+3)^2 + (B\,x + C)\,x\,(x^2+3) + (D\,x + E)\,x\,.$$

Otteniamo $A = \frac{4}{9}$, $B = -\frac{4}{9}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$, $E = 0$, ossia

$$\frac{2\,x^2+4}{x\,(x^2+3)^2} = \frac{4}{9\,x} - \frac{4\,x}{9\,(x^2+3)} - \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)^2}\,,$$

e quindi

$$\int \frac{2\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x} = \int \frac{2\,x^2+4}{x\,(x^2+3)^2} = \int \frac{4}{9\,x} - \int \frac{4\,x}{9\,(x^2+3)} - \int \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)^2}\,,$$

dove si apprezzi come ha lavorato bene la linearitá dell'integrale nello sminuzzare un problema in problemi piú piccoli.

Ora, $\int \frac{4}{9\,x} = \frac{4}{9}\log|x|$, mentre $\int \frac{4\,x}{9\,(x^2+3)}\,d\,x = \frac{2}{9}\int \frac{1}{x^2+3}\,d\,(x^2+3) = \frac{2}{9}\log|x^2+3|$, e $\int \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)^2}\,d\,x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x^2+3)^2}\,d\,(x^2+3) = -\frac{1}{3\,(x^2+3)}$.

$\int \frac{x^6+6\,x^4+11\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x} = \frac{x^2}{2} + \int \frac{2\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x} =$

Fattorizzazione del denominatore e scomposizione di Hermite:

$\int \frac{2\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x} = \int \frac{2\,x^2+4}{x\,(x^2+3)^2} = \int \frac{4}{9\,x} - \int \frac{4\,x}{9\,(x^2+3)} - \int \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)^2}.$

La linearitá dell'integrale ha spezzato il problema in 3, di cui 1 immediato:

$\int \frac{4}{9\,x} = \frac{4}{9} \log|x|$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$\int \frac{4\,x}{9\,(x^2+3)}\,d\,x = \frac{2}{9} \int \frac{1}{x^2+3}\,d\,(x^2+3) = \frac{2}{9} \log|x^2+3|$

$\int \frac{2\,x}{3\,(x^2+3)^2}\,d\,x = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x^2+3)^2}\,d\,(x^2+3) = -\frac{1}{3\,(x^2+3)}$

Quindi $\int \frac{x^6+6\,x^4+11\,x^2+4}{x^5+6\,x^3+9\,x} = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{9} \log|x| - \frac{2}{9} \log|x^2+3| - \frac{1}{3\,(x^2+3)}.$

7/30

3. (2+2+3+3pt) Fornire la definizione di limite (finito) di una successione a_n. Dimostrare che $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$, se esiste, é sempre unico. Dimostrare che una successione monotona non-decrescente e limitata superiormente ammette sempre limite. Enunciare in modo preciso, e poi dimostrare, il teorema per la somma di limiti.

definizione limite

Diremo che il limite $\lim_{n\mapsto\infty} a_n$ esiste e vale ℓ se

comunque venga fissato un valore $\varepsilon > 0$

esiste allora un naturale $N = N(\varepsilon)$ tale che

$|a_n - \ell| < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$.

2/30

unicitá limite

Siano ℓ_1 ed ℓ_2 due valori per cui valga la proprietá definitoria di limite

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono N_1 ed N_2 tali che

$|\ell_1 - \ell_2| \leq |a_n - \ell_1| + |a_n - \ell_2| < 2\,\varepsilon$ per ogni $n \geq \max\{N_1, N_2\}$

ma se $|\ell_1 - \ell_2|$ é piú piccolo di ogni valore positivo allora é nullo e $\ell_1 = \ell_2$.

2/30

esistenza per successioni monotone

Poiché l'insieme dei valori $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitato superiormente, avrá estremo superiore.

Chiamiamolo ℓ. Quindi $\ell \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ma anche ...

comunque preso $\varepsilon > 0$, esisterá quindi un valore $a_{\overline{n}} > \ell - \varepsilon$

quindi $0 \leq \ell - a_n < \varepsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$, per monotonia.

Quindi l'estremo superiore delle immagini soddisfa alla proprietá definitoria di limite.

3/30

somma di limiti

Se $\lim_{n \mapsto \infty} a_n$ esiste finito e vale ℓ_1 e inoltre $\lim_{n \mapsto \infty} b_n$ esiste finito e vale ℓ_2

allora, dove $c_n = a_n + b_n$, esiste il $\lim_{n \mapsto \infty} c_n$ e vale $\ell_1 + \ell_2$.

Infatti, comunque preso $\varepsilon > 0$, sappiamo esistere N_1 ed N_2 tali che
$|(a_n + b_n) - (\ell_1 + \ell_2)| \leq |a_n - \ell_1| + |b_n - \ell_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ per ogni $n \geq \max\{N_1, N_2\}$,
che in buona conclusione é quanto volevasi dimostrare.

1+2/30

4. (4pt) Si calcoli:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4/30

5. (5pt) Si calcoli:

$\lim_{x\mapsto 0} \frac{(e^{\sin x}-1)(\cos(\tan x)-1)}{\sin^3 x}$ = Sostituendo 0 ad x otteniamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.
Per semplificare, converrá riguardare come:

$$\left(\lim_{x\mapsto 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\right) \cdot \left(\lim_{x\mapsto 0} \frac{\cos(\tan x)-1}{\sin^2 x}\right)$$

Il primo limite, con la sostituzione $t = \sin x \mapsto 0$, vale notoriamente 1.
Col secondo limite conviene la sostituzione $t = \tan x \mapsto 0$ ricordando $\sin x = \tan x \, \cos x$:

$$\left(\lim_{x\mapsto 0} \frac{\cos(\tan x)-1}{\tan^2 x}\right) \cdot \left(\lim_{x\mapsto 0} \cos^{-2} x\right) = \left(\lim_{t\mapsto 0} \frac{\cos(t)-1}{t^2}\right) \cdot 1$$

Servono ora 2 applicazioni di Hopital oppure un Taylor, ricordando $\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ pervenendo a $\lim_{t\mapsto 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)}{t^2} = -\frac{1}{2}$. 5/30

PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

1.a.a. piano Π_1 passante per i punti $(3\pi, 2\pi, 0)$, $(3\pi, 2\pi, 1)$ e $(6, 4, 1)$;

1.a.b. piano Π_2 contenente il punto $P = (0, 1, 0)$ e la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$;

1.a.c. piano Π_3 tangente alla superfice $3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 5$ nel punto $(1, 1, 0)$;

1.a.d. i piani Π_1, Π_2 e Π_3 sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale $2\,x - 3\,y = 0$ che é quindi equazione che caratterizza il piano Π_1.

Se il piano Π_2 contiene la retta $3\,x + 2\,y = z = 1$ allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni $3\,x + 2\,y = 1$ e $z = 1$, ossia $3\,\alpha x + 2\,\alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$. Poiché $z = 1$ non contiene la retta R, possiamo assumere $\alpha \neq 0$, e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere $\alpha = 1$. L'equazione di Π_2 é quindi $3\,x + 2\,y + \beta z = 1 + \beta$ per un opportuno valore di β che possiamo determinare imponendo il contenimento del punto $P = (0, 1, 0)$, che comporta $2 = 1 + \beta$, da cui $\beta = 1$. É poi possibile verificare che il piano $3\,x + 2\,y + z = 2$, contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superfice $F(x, y) = 3\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z = 5$ in un suo generico punto (x_0, y_0, z_0) é dato da $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z},\right)_{(x_0,y_0,z_0)}$ e quindi in $(1, 1, 0)$, che possiamo verificare appartenere alla superfice, vale $(6, 4, 2)$, che preferiamo rimpiazzare con $(3, 2, 1)$. Cerchiamo quindi un piano normale a $(3, 2, 1)$ e passante per $(1, 1, 0)$. Il generico punto (x, y, z) appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per $(3, 2, 1)$ eguaglia quello di $(1, 1, 0)$, che é 5.

Π_1: $2\,x - 3\,y = 0$

Π_2: $3\,x + 2\,y + z = 2$

Π_3: $3\,x + 2\,y + z = 5$

Π_1 (H) Π_2 (P) Π_3 (H) Π_1

1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta R passante per $(0, 0, 0)$ ed incidente ortogonalmente nella retta $R'(t) = (0, 1 + t, 1 + 2\,t)$.

La retta R sarà contenuta nel piano ortogonale a $(0, 1, 2)$ e passante per $(0, 0, 0)$, ossia nel piano $y + 2\,z = 0$ e passerà, oltre che per $(0, 0, 0)$, anche per il punto di R' contenuto in tale piano, dato da $(1+t)+2\,(1+2\,t) = 0$, quindi da $t = -\frac{3}{5}$, e quindi $\left(0, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$. Potremo pertanto scrivere $R(t) = (0, 2\,t, -t)$. É facile verificare sia il passaggio per $(0, 0, 0)$ che l'ortogonalitá.

$R(t) = (0, 2\,t, -t)\,.$

3/30

1.c. Calcolare la distanza tra le due rette $R_1(t) = (t,t,t)$ ed R_2 di equazioni $x+y=0$, $z=3$. Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo $x = s$, R_2 trova una riscrittura parametrica come $R_2(s) = (s,-s,3)$, ed é ora evidente che le rette non sono parallele né si incontrano. Quindi sono sghembe, non possono appartenere ad uno stesso piano.

Un ovvio vettore ortogonale ad entrambe é $(1,1,-2)$, dove l'ortogonalitá alla direzione $(1,-1,0)$ di R_2 ha imposto l'eguaglianza delle due prime componenti (che abbiamo a quel punto preferito assumere unitarie) e l'ortogonalitá alla direzione $(1,1,1)$ di R_1 ha determinato l'ultima componente. Un versore ortogonale ad entrambe le rette é pertanto $V = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Prendiamo ora un punto qualsiasi di R_1, quale $R_1(0) = (0,0,0)$ ed un punto qualsiasi di R_2, quale $R_2(0) = (0,0,3)$ e moltiplichiamo scalarmente lo spostamento $(0,0,3) - (0,0,0) = (0,0,3)$ per il versore V ottenendo, a meno di segno, la distanza $\frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$. I due punti che attengono questa distanza sono $(0,0,3)$ di R_2, che si intuisce per visualizzazione nello spazio della situazione, contro $(1,1,1)$ di R_1, che si deduce poi muovendosi da $(0,0,3)$ in direzione $(1,1,-2)$ fino a sbarco su R_1. Il computo della distanza torna e la visualizzazione geometrica convince, mi sa che ci siamo.

$d(R_1,R_2) = d\left((1,1,1),(0,0,3)\right) = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}\,.$
le rette R_1 e R_2 sono sghembe 3+1/30

2. È data la funzione $F(x,y) = y(x-y)^2 + x^2y^2 - (x^2+y^2)y - x^2 + 2x\,.$

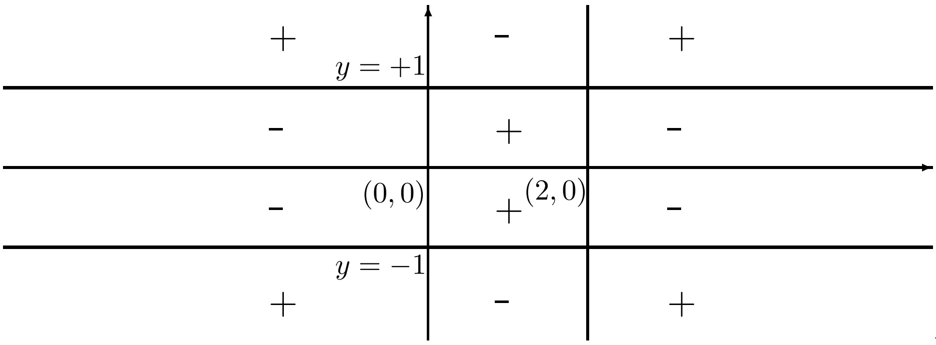
2.a. Disegnare l'insieme $\Sigma_0 = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\ \}$ e studiare il segno di F;

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della F tramite i soliti procedimenti algebrici appresi nella scuola dell'obbligo:

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= y(x-y)^2 + x^2y^2 - (x^2+y^2)y - x^2 + 2x \\
&= x^2y - 2\,xy^2 + y^3 + x^2y^2 - x^2y - y^3 - x^2 + 2x \\
&= x^2y^2 - 2\,xy^2 - x^2 + 2\,x \\
&= x(x-2)(y+1)(y-1)\,.
\end{aligned}$$

Per la legge di annullameno del prodotto, la funzione $F(x,y) = x(x-2)(y+1)(y-1)$ si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o x o $(x-2)$ o $(y+1)$ o $(y-1)$. Pertanto, $\Sigma_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \vee x = 2 \vee y = \pm 1\ \}$. Poichè la F è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ allora lo studio del segno ne consegue: il piano resta suddiviso nelle 9 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la F detiene con continuità in seno ad essa. La sola regione centrale è limitata.

2.a) Disegnare l'insieme Σ_0 e studio del segno:



1/30

2.b. Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione F;

Poichè la F è un polinomio, essa appartiene a $\mathbf{C}^\infty$, ed in particolare a $\mathbf{C}^1$, e quindi individuare i punti stazionari della F significa individuare quei punti di $\mathbb{R}^2$ in cui il gradiente della $F = x^2y^2 - 2\,xy^2 - x^2 + 2\,x = x(x-2)(y+1)(y-1)$ si annulla. Ora, $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2\,(x-1)(y+1)(y-1)$ e $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = 2\,xy(x-2)$ ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2\,(x-1)(y+1)(y-1) & = & 0 \\ 2\,xy(x-2) & = & 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $(0, \pm 1)$, $(2, \pm 1)$ e $(1, 0)$. Si noti che 4 dei 5 punti stazionari appartengono a Σ_0 e risulta evidente dallo studio del segno di cui al punto precedente che essi sono punti di sella in quanto, per ciascuno di essi, la F assume sia valori positivi che valori negativi su un intorno comunque piccolo. A tale conclusione si poteva altresì pervenire tramite il test delle derivate seconde, solo impiegando più tempo, e rischiando possibili errori ma anche situazioni di non conclusività del test stesso. Il quinto punto stazionario $(1, 0)$, sempre senza dover fare il test delle derivate seconde, deve essere un punto di massimo locale perché su ogni regione chiusa e limitata una F continua deve avere massimo e minimo.

2.b) Elencare i punti stazionari di F specificandone la natura:

4 PUNTI DI SELLA: $(0, \pm 1)$ e $(2, \pm 1)$.

1 PUNTO DI MASSIMO LOCALE: $(1, 0)$ con $F(1, 0) = 1$.

3/30

2.c. Determinare le equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_{-1}, dove, per $i = 0, \pm 1$, Π_i è il piano tangente il grafico di F nel punto $(0, i, 0)$;

In effetti, per $i = -1, 0, 1$, il punto $(0, i, 0)$ appartiene al grafico della F poichè $F(0, i) = 0$. Possiamo quindi procedere. Poichè $(0, 1)$ e $(0, -1)$ sono punti stazionari, i piani Π_1 e Π_{-1} sono orrizzontali, ed essendo disposti a quota 0 essi coincidono e sono descritti entrambi dall'equazione $z = 0$. A tale equazione si sarebbe pertanto pervenuti avvalendosi dell'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

che ora utilizziamo per ottenere l'equazione che descrive Π_0. In questo caso, la formula si instanzia come $z - F(0,0) = F_x(0,0)\,(x-0) + F_y(0,0)\,(y-0)$ ed otteniamo l'equazione $z = 2\,(x) + 0\,(y)$, che si semplifica in $z = 2\,x$. Spostandoci lungo il segmento di Σ_0 che collega i due punti stazionari $(0, \pm 1)$ stiamo quindi camminando su un costone, ed in effetti, muovendoci da $(0, -1)$ a $(0, 1)$, il nostro sguardo domina una valle a sinistra ed ammira un promontorio a destra, come risultava dall'analisi dello studio del segno.

2.c) Equazioni dei piani Π_0, Π_1 e Π_2:

Π_0: $z = 2\,x$ $\quad$ Π_1: $z = 0$ $\quad$ Π_{-1}: $z = 0$ $\quad$ 1+1+1/30

2.d. Determinare tutti i punti estremali di F nella regione $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leq 3\}$.

Poichè nessun punto stazionario della F è risultato essere punto estremale, tutti i punti estremali della F sulla regione R saranno necessariamente situati sulla frontiera di R, e pertanto il piano è di andarli a stanare con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ e $g_x = 2\,x - 2$ e $g_y = 2\,y$ ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2\,(x-1)(y+1)(y-1) & = F_x = \lambda g_x & = & 2\,\lambda\,(x-1) \\ 2\,xy(x-2) & = F_y = \lambda g_y & = & 2\,\lambda\,y \\ x^2 + y^2 - 2\,x & = g(x,y) & = & 3\,. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo di fatto assumere $\lambda \neq 0$. Nel massaggiare e combinare opportunamente le equazioni, meglio vederci, e vale pertanto la pena spendere l'osservazione preliminare che R altro non è che un cerchio con centro nel punto $(1,0)$ e raggio 2. Conviene rappresentarsi la regione R in concomitanza alla studio del segno per raccogliere informazioni ed idee. La F, essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto in ciascuna delle regioni in cui il piano viene cosí suddiviso, ed in particolare sará rilevante individuare i massimi nelle regioni contrassegnate con un $+$ ed i minimi nelle regioni contrassegnate con un $-$. Come dicevamo sopra, ci interessano ora solo le 8 regioni contornate dal cerchio bordante R. Inoltre, poiché le simmetrie $F(x,y) = F(x,-y)$ e $F(1-x,y) = F(1+x,y)$ sono anche proprie della regione R, le regioni sostanzialmente diverse sono solo 3, con 2 di esse (etichettate $-$) che hanno un gemello ed 1 di esse (etichettata $+$)con 3 gemelli. A questo punto non dovrebbe sorprendere che la prima equazione sia automaticamente soddisfatta in corrispondenza di $x = 1$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $y = \pm 2$; a questo punto il soddisfacimento della seconda equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente, risulta evidente che i poli sud e nord del cerchio siano punti estremali, con $F(1, \pm 2) = -3$. Analogamente, la seconda equazione risulta automaticamente soddisfatta per $y = 0$, cui, dalla terza equazione, corrisponde $x = 1 \pm 2$; a questo punto il soddisfacimento della prima equazione è garantito dal fatto che possiamo ancora giocarci il valore di λ. Ed in effetti, considerata graficamente, risulta evidente che i poli est ed ovest del cerchio siano punti estremali, con $F(1 \pm 2, 0) = -3$.

L'esclusione di queste due ovvie soluzioni conduce ad una semplificazione delle equazioni ottenuta assumendo $x \neq 1$ ed $y \neq 0$. In effetti, se $x \neq 1$, allora la prima equazione si semplifica in $\lambda = y^2 - 1$, mentre, se $y \neq 0$, la seconda equazione si semplifica in $\lambda = x^2 - 2\,x$, che combinate danno $y^2 = x^2 - 2\,x + 1$, che infornata nella terza equazione porta a conludere che $2\,y^2 = 4$. E da questo $y = \pm\sqrt{2}$, di nuovo combinando con la terza equazione, scaturiscono i 4 gemellini $y = \pm\sqrt{2}$, $x = 1 \pm \sqrt{2}$, tutti massimi con $F(1 \pm \sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = 1$. Ora, con grande coincidenza fortuita, $F(1,0) = 1$ e pertanto su R abbiamo 5 punti tutti di massimo assoluto.

2.d)

5 Max Assoluti: $(1,0)$, $(1 \pm \sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ e $(1 \pm \sqrt{2}, \mp\sqrt{2})$ dove $F = 1$

4 Min Assoluti: $(1, \pm 2)$ e $(1 \pm 3, 0)$; $F(1, \pm 2) = F(1 \pm 3, 0) = -3$

6/30