

**Prova scritta di Matematica 14 giugno 2011 - CORREZIONE Fila A**

c.d.L. Scienze dell'Architettura - Prof. R. Rizzi

1. (3pt) Dimostrare per induzione che

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

dimostrazione

Per ogni naturale positivo  $n$ , sia  $f(n) = \sum_{i=1}^n i$ .

BASE: calcolo  $f(1) = 1$  proprio come  $\frac{1(1+1)}{2}$ .

PASSO: verifico l'identità per  $n+1$  assumendola per  $n$ :

$$f(n+1) = f(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

3/30

2. (13pt) Dove  $a_n$  è limitata superiormente e  $b_n \leq a_n$  è monotona non decrescente, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere (+ fornendo dimostrazioni) e quali sono false (+ fornendo controesempi).

(1+2pt) se  $b_n$  è una successione di interi allora converge ad un qualche numero razionale;

(1+2pt) se  $a_n$  è una successione di interi allora converge ad un numero intero;

(0+3pt) se  $b_n$  è una successione di razionali allora converge ad un qualche numero razionale;

(1+1pt) se  $b_n$  è una successione di reali allora converge ad un qualche numero reali;

(1+1pt) se  $a_n$  è una successione di reali allora converge ad un qualche numero reali.

3. (5pt) Si calcoli:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - e^{x^2}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}} - (1-x^2)^{\frac{1}{4}}} =$$

Sostituendo 0 ad  $x$  otteniamo  $\frac{1-1}{0-0} = \frac{0}{0}$  per una forma indeterminata.

Per semplificare, converrà riferirsi agli sviluppi di Taylor:

$$(1 \pm x^2)^{\frac{1}{4}} = 1 \pm \frac{1}{4}x^2 + o(x^2), \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$$

$$\text{pervenendo a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - 1 - x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{1}{4}x^2 - 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = -3.$$

5/30

Si sarebbe potuto risolvere anche con due applicazioni consecutive dell'Hopital, ma l'impiego degli sviluppi di Taylor a fine semplificatorio ci consegna qui chiaramente una maggior rapidità di lettura della situazione.

4. (6pt) Si calcoli  $\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}$ .

Vi é un metodo generale per l'integrazione delle razionali fratte, che come primo passo rende il grado del numeratore non eccedente a quello del denominatore (tramite divisione polinomiale) e come secondo (ed unico per il quale il metodo non sia effettivo) passo cerca di fattorizzare il denominatore come polinomi di grado al piú due (cosa sempre fattibile in linea di principio per il teorema fondamentale dell'algebra). Siccome il grado del numeratore é già basso, siamo proprio a questo secondo passo non scontato ed inquietante, e speriamo che me la cavo ...

Siamo fortunati, il polinomio a denominatore é di quinto grado (e quindi già non esiste un metodo per determinarne le radici) non ha termine noto nullo, ossia  $x=0$  ne é una radice e possiamo quindi raccogliere la  $x$  come prima fattorizzazione rimanendo con un polinomio di quarto grado che ha quel punto é sicuramente gestibile. In questo caso, dopo aver raccolto la  $x$ , mi restano solo le potenze pari, e quindi posso vederlo come un polinomio di grado dimezzato  $\frac{4}{2} = 2$  che puó essere sempre risolto con la formula del delta. Ma la fattorizzazione risulta evidente di suo se ci si é creati quell'attimo di domestichezza consigliabile coi prodotti notevoli.

$$4x^5 + 4x^3 + x = x(4x^4 + 4x^2 + 1) = x(2x^2 + 1)^2.$$

A questo punto il teorema di Hermite garantisce che esistano dei valori  $A, B, C, D$  ed  $E$  tali che

$$\frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(2x^2 + 1)^2},$$

ed il prossimo passo consiste nel determinare questi valori. La macchina per compierlo consiste nella soluzione del sistema che scaturisce dall'uguaglianza desiderata, ossia dall'identitá polinomiale:

$$x^2 + 2 = A(2x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(2x^2 + 1) + (Dx + E)x.$$

Otteniamo  $A = 2, B = -4, C = 0, D = -3, E = 0$ , ossia

$$\frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{4x}{2x^2 + 1} - \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2},$$

e quindi

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} = \int \frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \int \frac{2}{x} - \int \frac{4x}{2x^2 + 1} - \int \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2},$$

dove si apprezzi come ha lavorato bene la linearità dell'integrale nello sminuzzare un problema in problemi più piccoli.

Ora,  $\int \frac{2}{x} = 2 \log |x|$ , mentre  $\int \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{2x^2 + 1} d(2x^2 + 1) = \log |2x^2 + 1|$ , e  $\int \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{(2x^2 + 1)^2} d(2x^2 + 1) = -\frac{3}{4} \frac{1}{2x^2 + 1}$ .

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} =$$

Fattorizzazione del denominatore e scomposizione di Hermite:

$$\int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} = \int \frac{x^2 + 2}{x(2x^2 + 1)^2} = \int \frac{2}{x} - \int \frac{4x}{2x^2 + 1} - \int \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2}.$$

La linearità dell'integrale ha spezzato il problema in 3, di cui 1 immediato:

$$\int \frac{2}{x} = 2 \log |x|$$

E gli altri 2 facilmente maneggiabili:

$$\int \frac{4x}{2x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{2x^2 + 1} d(2x^2 + 1) = \log |2x^2 + 1|$$

$$\int \frac{3x}{(2x^2 + 1)^2} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{(2x^2 + 1)^2} d(2x^2 + 1) = -\frac{3}{4} \frac{1}{2x^2 + 1}$$

$$\text{Quindi } \int \frac{x^2 + 2}{4x^5 + 4x^3 + x} = 2 \log |x| - \log |2x^2 + 1| + \frac{3}{4} \frac{1}{2x^2 + 1}.$$

7/30

# PARTE Matematica II

1. Determinare le equazioni dei seguenti piani:

- 1.a.a. piano  $\Pi_1$  passante per i punti  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 0)$  e  $(1, -5, 1)$ ;
- 1.a.b. piano  $\Pi_2$  contenente la retta  $R(t) = (1, t, -3t)$  e la retta  $2x + 3y = z = 1$ ;
- 1.a.c. piano  $\Pi_3$  tangente alla superficie  $2x^2 + 3y^2 + 2z = 7$  nel punto  $(1, 1, 1)$ ;
- 1.a.d. i piani  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$  sono paralleli (P), ortogonali (H) o in posizione generica (G)?

Per tutti e tre i punti vale  $5x - y + 5z = 15$  che é quindi equazione che caratterizza il piano  $\Pi_1$ .

Se il piano  $\Pi_2$  contiene la retta  $2x + 3y = z = 1$  allora avrá equazione che é combinazione lineare delle equazioni  $2x + 3y = 1$  e  $z = 1$ , ossia  $2\alpha x + 3\alpha y + \beta z = 1(\alpha + \beta)$ . Poiché  $z = 1$  non contiene la retta  $R$ , possiamo assumere  $\alpha \neq 0$ , e quindi, normalizzando, ci é lecito assumere  $\alpha = 1$ . L'equazione di  $\Pi_2$  é quindi  $2x + 3y + \beta z = 1 + \beta$  per un opportuno valore di  $\beta$  che possiamo determinare imponendo il contenimento della prima retta  $R(t) = (1, t, -3t)$ , che comporta  $2 + 3t - 3\beta t = 1 + \beta$ , da cui  $\beta = 1$ . É poi possibile verificare che il piano  $2x + 3y + z = 2$ , contiene effettivamente ambo le rette.

Il vettore tangente alla superficie  $F(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 2z = 7$  in un suo generico punto  $(x_0, y_0, z_0)$  é dato da  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)_{(x_0, y_0, z_0)}$  e quindi in  $(1, 1, 1)$ , ch e possiamo verificare appartenere alla superficie, vale  $(4, 6, 2)$ , che preferiamo rimpiazzare con  $(2, 3, 1)$ . Cerchiamo quindi un piano normale a  $(2, 3, 1)$  e passante per  $(1, 1, 1)$ . Il generico punto  $(x, y, z)$  appartiene a tale piano se e solo se il suo prodotto scalare per  $(2, 3, 1)$  eguaglia quello di  $(1, 1, 1)$ , che é 6.

$\Pi_1: 5x - y + 5z = 15$	$\Pi_1$ (G) $\Pi_2$ (P) $\Pi_3$ (G) $\Pi_1$
$\Pi_2: 2x + 3y + z = 2$	
$\Pi_3: 2x + 3y + z = 6$	1+1+1+2/30

1.b. Trovare un'equazione parametrica per la retta  $R$  passante per  $(1, 2, 3)$  ed incidente ortogonalmente nella retta  $R'(t) = (0, 1 + t, 1 + 2t)$ .

La retta  $R$  sará contenuta nel piano ortogonale a  $(0, 1, 2)$  e passante per  $(1, 2, 3)$ , ossia nel piano  $y + 2z = 8$  e passerá, oltre che per  $(1, 2, 3)$ , anche per il punto di  $R'$  contenuto in tale piano, dato da  $(1 + t) + 2(1 + 2t) = 8$ , quindi da  $t = 1$ , e quindi  $(0, 2, 3)$ . La direzione di  $R$  é espressa dal vettore  $(1, 2, 3) - (0, 2, 3) = (1, 0, 0)$ . Potremo pertanto scrivere  $R(t) = (1 + t, 2, 3)$ .

$R(t) = (1 + t, 2, 3)$ .	3/30
--------------------------	------

- 1.c. Calcolare la distanza tra la retta  $R_1$  di equazioni  $3y = 2z$  e  $y = -2x$  e la retta  $R_2 = (1 - 2t, 3 - t, 2 + t)$ . Determinare se queste due rette siano sghembe o coplanari. Nel secondo caso, specificare se esse siano incidenti oppure parallele. Se parallele, specificare se esse siano distinte oppure coincidenti.

Ponendo  $x = t$  risulta facile trovare una forma parametrica per la prima retta come  $R_1(t) = (t, -2t, -3t)$ . Risulta ora evidente che la retta  $R_1$  di direzione  $(1, -2, -3)$  e la retta  $R_2$  di direzione  $(-2, -1, 1)$  non sono parallele. Il vettore  $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1)$  risulta ortogonale ad entrambe queste direzioni e cattura pertanto la direzione di un percorso minimo da una retta all'altra. Sia  $P_1 = (0, 0, 0)$  un qualsiasi punto della retta  $R_1$  (ottenuto ponendo  $t = 0$ ) e sia  $P_2 = (1, 3, 2)$  un qualsiasi punto della retta  $R_2$  (ottenuto ponendo  $t = 0$ ). La distanza tra le due rette vale allora

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1) \cdot (P_2 - P_1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1) \cdot (1, 3, 2) = 0.$$

Quindi le due rette si incontrano. Entrambe le rette sono infatti contenute nel piano  $x - y + z = 0$ , e, come abbiamo osservato, non sono parallele. Per determinare il punto di incontro, da  $y = -2x$  otteniamo  $3 - t = -2(1 - 2t)$ , da cui  $t = 1$  che individua in  $R_2$  il punto  $(-1, 2, 3)$ .

$d(R_1, R_2) = 0.$   
 Le rette  $R_1$  ed  $R_2$  si incontrano nel punto  $(-1, 2, 3)$ . 2+1/30

2. È data la funzione  $F(x, y) = x^2(y + 7) - 9(x^2 + y - 2)$ .

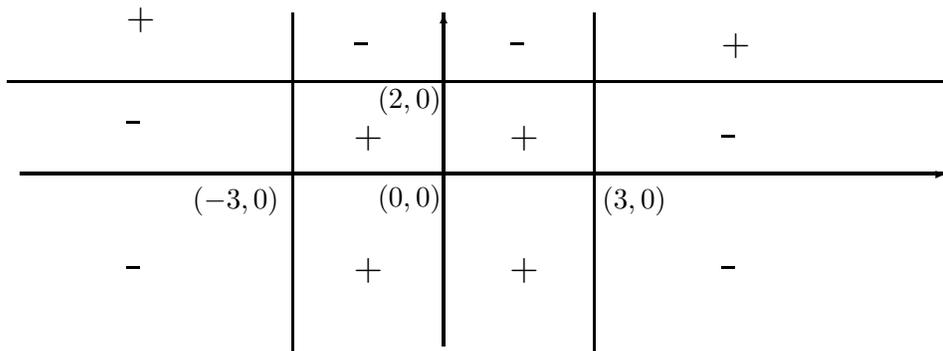
2.a. Disegnare l'insieme  $\Sigma_0 = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$  e studiare il segno di  $F$ .

Semplifichiamo innanzitutto la scrittura della  $F$ :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2(y + 7) - 9(x^2 + y - 2) && \text{come data} \\ &= x^2y + 7x^2 - 9x^2 - 9y + 18 && \text{sviluppata} \\ &= x^2y - 2x^2 - 9y + 18 && \text{dopo ovvio raccoglimento} \\ &= (x^2 - 9)(y - 2) && \text{prima fattorizzazione} \\ &= (x - 3)(x + 3)(y - 2). && \text{completamente fattorizzata} \end{aligned}$$

Poichè la  $F$  è continua su tutto  $\mathbb{R}^2$  allora lo studio del segno si riduce alla comprensione di  $\Sigma_0$ . Per la legge di annullamento del prodotto, la funzione  $F(x, y) = (x - 3)(x + 3)(y - 2)$  si annulla in corrispondenza di tutti e soli quei punti per i quali si annulla o  $(x - 3)$  o  $(x + 3)$  o  $(y - 2)$ . Quindi,  $\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 3 \vee y = 2\}$  ed il piano resta suddiviso nelle 6 regioni in figura, ciascuna labellata col segno che la  $F$  detiene con continuità in seno ad essa. Di queste regioni, una sola è limitata (quella centrale).

**2.a)** Disegnare l'insieme  $\Sigma_0$  e studio del segno:



2/30

**2.b.** Determinare e studiare TUTTI i punti stazionari della funzione  $F$ ;

Poichè la  $F$  appartiene a  $\mathbf{C}^\infty$ , individuare i punti stazionari della  $F$  significa individuare quei punti di  $\mathbb{R}^2$  in cui il gradiente della  $F = (x^2 - 9)(y - 2)$  si annulla. Ora,  $F_x := \frac{\partial F}{\partial x} = 2x(y - 2)$  e  $F_y := \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 9$  ed imponendo la condizione di annullamento del gradiente si perviene al sistema

$$\begin{cases} 2x(y - 2) = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni i due punti  $(\pm 3, 2)$ . Si noti che  $F(\pm 3, 2) = 0$ , e che i punti  $(\pm 3, 2)$  sono di sella per quanto visto allo studio del segno.

**2.b)** Elencare i punti stazionari di  $F$  specificandone la natura:

PUNTI STAZIONARI: i 2 punti  $(\pm 3, 2)$ .  
I punti  $(\pm 3, 2)$  sono punti di sella.

3/30

**2.c.** Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di  $F$  nel punto  $(1, 1, 8)$ ; In effetti il punto  $(1, 1, 8)$  appartiene al grafico della  $F$  poichè  $F(1, 1) = 8$ . Possiamo quindi procedere. Poichè le derivate parziali  $F_x = 2x(y - 2)$  e  $F_y = x^2 - 9$  esistono e sono continue in un intorno di  $(1, 1)$ , la  $F$  è differenziabile in tale punto, ossia ammette ivi un'approssimazione lineare. Il piano tangente richiesto può essere considerato come l'approssimazione lineare della  $F$  nell'intorno del punto  $(1, 1)$ . Si noti come l'equazione del piano tangente (testo, pag. 192):

$$z - z_0 = F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

coincida infatti con lo sviluppo di MacLaurin del primo ordine. Tutti concetti che ben generalizzano, ed anzi ispirati da una perfetta analogia, dal caso monodimensionale. Nel nostro caso, la formula si instanzia come  $z - F(1, 1) = F_x(1, 1)(x - 1) + F_y(1, 1)(y - 1)$  ed otteniamo l'equazione  $z - 8 = -2(x - 1) - 8(y - 1)$ , che si semplifica in  $2x + 8y + z = 18$ . A titolo di verifica, si noti come in effetti il punto  $(1, 1, 8)$  appartenga a tale piano.

**2.c)** Equazione del piano tangente  $F$  in  $(1, 1, 8)$ :

$$2x + 8y + z = 18$$

2/30

**2.d.** Determinare tutti i punti estremali di  $F$  nella regione  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$ .

La  $F$ , essendo continua, dovrà necessariamente avere almeno un punto di massimo assoluto ed almeno un punto di minimo assoluto nella regione assegnata, dacchè questa è chiusa. Poichè nessun punto stazionario della  $F$  è risultato essere punto di minimo, i minimi della  $F$  saranno necessariamente situati sulla frontiera, e pertanto investighiamo eventuali estremi sulla frontiera impiegando la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange, ossia impostando il seguente sistema, dove  $g(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g_x = 2x$  e  $g_y = 2y$  ne rappresentano le derivate parziali.

$$\begin{cases} 2x(y-2) = F_x = \lambda g_x = 2\lambda x \\ x^2 - 9 = F_y = \lambda g_y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = g(x, y) = 16. \end{cases}$$

Poichè vogliamo ora guardare al di là dei punti stazionari (già investigati), possiamo allora assumere  $\lambda \neq 0$ . Per incominciare, si assuma  $x \neq 0$ . In questo caso la prima equazione si semplifica in  $(y-2) = \lambda$ , che sostituito nella seconda equazione conduce a  $x^2 = 2y^2 - 4y + 9$ , che sostituito nella terza porta all'equazione di secondo grado  $3y^2 - 4y - 7 = 0$ , con  $y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+21}}{3} = \frac{2 \pm 5}{3}$ . Sempre in base alla terza equazione, queste due radici rilevano i punti di minimo  $(\pm\sqrt{15}, -1)$  ed i punti di massimo  $(\pm\frac{\sqrt{95}}{3}, \frac{7}{3})$ . Con  $x = 0$  otteniamo invece  $y = \pm 4$  dalla terza equazione. Ora  $F(0, 4) = -18$  e  $F(0, -4) = 54$  mentre  $F(\pm\sqrt{15}, -1) = -18$  e  $F(\pm\frac{\sqrt{95}}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{14}{27}$ . Se ne conclude che i 3 punti  $(0, 4)$  e  $(\pm\sqrt{15}, -1)$  sono minimi assoluti su  $R$ , ed il punto  $(0, -4)$  è massimo assoluto su  $R$  mentre i 2 punti  $(\pm\frac{\sqrt{95}}{3}, \frac{7}{3})$  sono massimi relativi su  $R$ .

**2.d)**

3 MIN ASSOLUTI:  $(0, 4), (\pm\sqrt{15}, -1)$ ;  $F(0, \pm 5) = -18 = F(\pm\sqrt{15}, -1)$

2 MAX RELATIVI:  $(\pm\frac{\sqrt{95}}{3}, \frac{7}{3}), ; F(\pm\frac{\sqrt{95}}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{14}{27}$

1 MAX ASSOLUTO:  $(0, -4)$ ;  $F(0, -4) = 54$

6/30