Esame scritto di Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 24 settembre 2010

Nome Cognome: **Matricola:** **Anno iscrizione:**

Selezionare i moduli affrontati nel presente esame: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2007-2008 e seguenti non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 4 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 7 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2006-2007 e precedenti che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 10 o 14 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 + 4 punti bonus) + (10 punti), minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 7 punti bonus) + (10 punti), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$ (20 punti + 4 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = e^{-x^2}$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (11 punti)
2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che non esiste un minimo per f, ossia che $\nexists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(\alpha) \leq f(x)$. (4 punti)
3. Si studi
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}. \qquad \text{(4 punti)}$$
4. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int x \left(\frac{\sqrt{3}}{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx.$ (5 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(1, f(1))$. (2 punti)
6. Si dimostri che la funzione $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)
7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 2$. (4 punti)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
(10 punti + 7 punti bonus)

8. Sia $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano dato dall'equazione $2x - 3y + 5z - 7 = 0$ e sia $P = (\sqrt{2}, \pi, 0)$ un punto di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Si dica se $P \in \Pi$; (1 punto)
   (b) si esprima in forma parametrica la retta r tale che $r \perp \Pi$ e $P \in r$. (2 punti)
9. È data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2y - 2xy^2 + y$.
   (a) si dimostri che f è differenziabile; (2 punti)
   (b) Si dica se f è limitata o meno; (1 punto)
   (c) si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono; (4 punti)
10. È data la regione $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$.
    (a) Si disegni D; (1 punto)
    (b) Si dica se f è limitata o meno; (1 punto)
    (c) si calcoli l'integrale di volumee $\iint_D f\, dS$. (5 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ (10 punti)

11. Sia f la funzione dell'esercizio 9.
    (a) si determini l'equazione del piano tangente nel punto $(1, -1)$; (2 punti)
    (b) si calcoli la derivata direzionale in $(1, -1)$ rispetto al versore definito da $\mathbf{v} = (-1, 1)$. (2 punti)
12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [1, 5] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r}(t) = t^2/2\,\vec{i} + t\sqrt{2}\,\vec{j} + \ln t\,\vec{k}$.
    (a) Si verifichi che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([1, 5])$ è regolare; (2 punti)
    (b) si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$; (2 punti)
    (c) si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$; (2 punti)