Esame scritto di Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 7 settembre 2010

Nome Cognome: **Matricola:** **Anno iscrizione:**

Selezionare i moduli affrontati nel presente esame: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2007-2008 e seguenti non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 4 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 11 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2006-2007 e precedenti che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 10 o 14 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 + 4 punti bonus) + (10 punti), minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 11 punti bonus) + (10 punti + 1 punto bonus), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{\mathbf{1}}$ o i moduli $\boxed{\mathbf{1+2}}$ (20 punti + 4 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \ln(x^2 - 1)$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (11 punti)

2. Siano $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0^+ =]0, +\infty[$ ed $f : A \to B$ definita da $f(x) = e^{x+1}$.
   Si dica, motivandolo, se f è iniettiva e suriettiva. (2 punti)
   Conseguentemente, si dica, sempre motivandolo, se esiste $f^{-1} : B \to A$, e nel caso affermativo si definisca tale funzione inversa. (3 punti)

3. Si studi
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|-x^2|}{2x^2 - 1/x}. \qquad \text{(3 punti)}$$

4. Si calcoli l'integrale indefinito
$$\int \varphi(x)\,dx = \int 3x^2 e^x\,dx; \qquad \text{(5 punti)}$$

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)
6. Si dimostri che la funzione $p(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)
7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 2$. (4 punti)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
(10 punti + 11 punti bonus)

8. Sia $\pi_1 \subset \mathbb{R}^3$ il piano dato dall'equazione $x + z = 2$ e sia $\pi_2 \subset \mathbb{R}^3$ il piano dato dall'equazione $x - y = 0$.
   (a) Si consideri $\pi_1 \cap \pi_2$ e si dica se tale insieme è vuoto, una retta o un piano; (2 punti)
   (b) nel caso in cui l'insieme $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, lo si esprima in forma parametrica, altrimenti lo si scriva mediante un'equazione opportuna. (2 punti)
9. È data la regione $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x - 1/2| \leq 1/2, \ |y - 1/2| \leq 1/2\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x, y) = x^3 - xy - x^2 + y^2$.
   (a) Si disegni D; (2 punti)
   (b) si dimostri che f è differenziabile; (2 punti)
   (c) si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono; (3 punti)
   (d) si calcolino i massimi e minimi di f in D. (5 punti)
10. È data la regione $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}, \ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
   (a) Si disegni D; (1 punto)
   (b) si calcoli l'integrale di volumee $\iiint_D f\, dV$. (4 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$ (10 punti + 1 punto bonus)

11. Sia f la funzione dell'esercizio 9.
   (a) Si dica se f è limitata o meno; (1 punto)
   (b) si determini l'equazione del piano tangente nel punto $(1/2, 1/2)$; (2 punti)
   (c) si calcoli la derivata direzionale in $(1/2, 1/2)$ rispetto al versore definito da $\mathbf{v} = (1, 1)$. (2 punti)
12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \ \vec{r}(t) = 4 \sin t\, \vec{i} + 4 \cos t\, \vec{j} + 3t\, \vec{k}$.
   (a) Si verifichi che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0, 2\pi])$ è regolare; (2 punti)
   (b) si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$; (2 punti)
   (c) si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$; (1 punto)
   (d) si esprima il parametro t in funzione di s (ossia, si inverta la funzione s). (1 punto)