Esame scritto di Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 28 giugno 2010

Nome Cognome: **Matricola:** **Anno iscrizione:**

Selezionare i moduli affrontati nel presente esame: $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{2}}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2008-2009 e seguenti (ordinamento 270/04) non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 3 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 5 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2007-2008 e precedenti (ordinamento 509/99) che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 11 o 16 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 punti + 3 punti bonus) + (10 punti + 1 punto bonus), minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 5 punti bonus) + (10 punti + 6 punti bonus), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{\mathbf{1}}$ o i moduli $\boxed{\mathbf{1+2}}$
(20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (10 punti)
2. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = \lim_{x\to x_0^-} g(x) = c$. Si discuta la continuità di g al variare dei possibili x_0 e c per i quali i limiti hanno senso. (4 punti)
3. Si calcoli
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{2x}. \qquad \text{(4 punti)}$$
4. Si calcoli l'integrale indefinito, ossia tutte le primitive, della funzione
$$\psi(x) = (x+1)(\cos(x+2)); \qquad \text{(4 punti)}$$
si calcoli poi l'integrale definito $\int_{\pi/2}^{\pi} \psi(x)dx$. (1 punto)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti + 1 punto bonus)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(1, f(1))$. (2 punti)

6. Sia f come nell'esercizio 1, e sia $\varphi(x) = f(x) - 2$. Si dimostri che $\varphi(x)$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (5 punti)

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1{+}2}$
(10 punti + 5 punti bonus)

8. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta data dalle equazioni $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ e $s \subset \mathbb{R}^3$ la retta parametrizzata da $s(t) = (2, -1, 1) + t(-1, 1, -1)$. Si trovi
   (a) il punto $P \in \mathbb{R}^3$ tale che $\{P\} = r \cap s$; (1 punto)
   (b) un'equazione del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tale che $r \subset \pi$ e $s \subset \pi$. (3 punti)

9. È data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$.
   (a) Si dimostri che f è differenziabile. (2 punti)
   (b) Si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono. (4 punti)

10. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3$ delimitata dalle superficie $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ e $\{x + y + z = 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = z$,
    (a) si disegni D; (1 punto)
    (b) si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (4 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$ (10 punti + 6 punti bonus)

11. Sia f la funzione dell'esercizio 9.
    (a) Si dica se f è limitata o meno; (1 punto)
    (b) si determini l'equazione del piano tangente nel punto $(1, 0)$; (2 punti)
    (c) si calcoli la derivata direzionale in $(1, 0)$ rispetto al versore definito da $\mathbf{v} = (1, 1)$. (2 punti)

12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0, 2] \to \mathbb{R}^3,\ \vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{\imath} + (t/\sqrt{2})\vec{\jmath} + (\sqrt{t^3}/3)\vec{k}$.
    (a) Si verifichi che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0, 2])$ è regolare; (2 punti)
    (b) si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$; (3 punti)
    (c) si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$. (1 punti)

13. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 12 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)