Esame scritto di Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 26 febbraio 2010

Nome Cognome: **Matricola:** **Anno iscrizione:**

Selezionare i moduli affrontati nel presente esame: $\boxed{\textbf{1}}$ $\boxed{\textbf{2}}$

Gli studenti iscritti agli A.A. 2008-2009 e seguenti (ordinamento 270/04) non possono sostenere l'esame in due moduli separati. L'esame è quindi diviso nei due moduli seguenti con i relativi punti e livelli di sufficienza minimi da conseguire in entrambi (l'insufficienza in uno dei due moduli rende insufficiente l'esame):

1. matematica 1: 20 punti + 3 punti bonus, minimo 12 punti per la sufficienza;
2. matematica 2: 10 punti + 5 punti bonus, minimo 6 punti per la sufficienza.

Il tempo totale è di 3 ore.

Agli iscritti negli A.A. 2007-2008 e precedenti (ordinamento 509/99) che intendono sostenere solo uno dei moduli (per chi li affronta entrambi vale quanto scritto sopra) è aggiunta alla sezione corrispondente un numero di esercizi per 10 o 12 punti con un ricalcolo della sufficienza e del tempo come segue:

1. matematica 1: (20 + 3 punti bonus) + 10 punti, minimo 18 punti per la sufficienza, 3 ore;
2. matematica 2: (10 punti + 5 punti bonus) + (10 punti + 4 punti bonus), minimo 12 punti per la sufficienza (20 punti corrisponde al voto trenta/30), 2 ore.

Scrivete chiaramente e in buon italiano. Sono ammessi solo carta e penna.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{\textbf{1}}$ o i moduli $\boxed{\textbf{1+2}}$
(20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (9 punti)

2. Si studi $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2+x}$. (5 punti)

3. Siano A e B due insiemi, e sia $f : A \to B$ una funzione tale che $\forall x \in A$ vale $f(x) = b \in B$. Al variare di A e B si discuta la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

   (a) f è iniettiva;

   (b) f è suriettiva.

   (4 punti)

4. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+1}dx$. (5 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)
6. Si dimostri che la funzione $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)
7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$
(10 punti + 5 punti bonus)

8. Sia P_1 il piano contenente i seguenti 3 punti: l'origine $O \in \mathbb{R}^3$, $A = (3, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $B = (1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$; sia poi $P_2 = (2x - 3y + 5z + 1 = 0) \subset \mathbb{R}^3$ un secondo piano. Dire quale dei seguenti casi si verifica:

   (a) i piani coincidono ($P_1 = P_2$);

   (b) i piani si intersecano in una retta $\mathscr{R} = P_1 \cap P_2$. In questo caso si descriva $\mathscr{R}$;

   (c) i piani sono paralleli. In questo caso si calcoli la distanza $\mathrm{d}(P_1, P_2)$ tra P_1 e P_2.

   (3 punti)

9. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + y^2 \neq 0\}$ delimitata dalle superficie $\{z = 2\}$ e $\{z = x^2 + y^2\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si disegni D e si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (5 punti)

10. È data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^3 - 3x)(1 - y^2)$. Si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono. (7 punti)

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$ (10 punti + 4 punti bonus)

11. Si dica se la funzione f dell'esercizio 10 è limitata o meno. Se ne determini l'equazione del piano tangente nel punto $(0, 0)$. Se ne calcoli la derivata direzionale rispetto al versore definito dal vettore $(1, 1)$ nel punto $(0, 0)$. (5 punti)

12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \left(\frac{2}{3} + t\right)\vec{i} + \left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)\vec{j} + \left(-1 + \frac{1}{3}t^3\right)\vec{k}$. Dopo aver verificato che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0, 2])$ è regolare, si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$ e si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$. (4 punti)

13. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 12 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)