Logica Matematica	*tempo a disposizione: 2:30 h*
Anno Accademico 2010/2011	*giustificare tutte le risposte*
Esercitazione di preparazione all'esame	

Nota. *Questa è la prova di esame assegnata in un corso di Logica del 2007/08. È quindi da prendere come indicativa. Lo scritto dell'esame per il corso 2010/2011 coprirà tutto il programma trattato a lezione, in particolare i modelli per LJ che non sono stati trattati nel 2007/08.*

Linguaggio Proposizionale

Esercizio 1.
Considerate connettivo $\triangleright$ introdotto nel calcolo proposizionale dalla seguente equazione definitoria:

$$\Gamma \vdash A \triangleright B \quad \textit{se e solo se} \quad \Gamma \vdash B \;\; e \;\; \Gamma, A \vdash B$$

a. Risolvete questa equazione definitoria. Ovvero: trovate delle "buone" regole da aggiungere al calcolo dei sequenti che siano *equivalenti* all'equazione, e provatene l'equivalenza.

b. [Extra] Si può definire il connettivo $\triangleright$ utilizzando i connettivi usuali del calcolo di sequenti? Ovvero: si può definire una formula P (ottenuta combinando le formule A, B utilizzando i connettivi usuali) in modo da dimostrare che P è equivalente a $A \triangleright B$ utilizzando le usuali equazioni definitorie?

Esercizio 2.

a. Derivate il sequente $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$ in LJ.

b. Discutete perché il sequente $\vdash A \vee \neg A$ non è derivabile in LJ.

c. Derivate il sequente $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ in LJ.

Esercizio 3.
Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Giustificate le vostre risposte.

a. $P \models Q \wedge R$ se e solo se $P \models Q$ e $P \models R$

b. $P \models Q \vee R$ se e solo se $P \models Q$ oppure $P \models R$

c. $P \models Q$ se e solo se $\neg Q \models \neg P$

Linguaggio Predicativo

Esercizio 4.
Fornite una derivazione in LJ dei sequenti elencati. Nel caso non sia possibile, discutete perché non esite una derivazione in LJ e fornitene una in LK. Se non è possibile dare una derivazione neppure in LK, presentate un contro-modello.

a. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \vdash \forall x\,(\,A(x) \vee B(x)\,)$

b. $\vdash \exists x\,(\,A(x) \vee \neg\exists x A(x)\,)$

c. $\vdash \exists x\,(\,A(x) \wedge \neg\exists x A(x)\,)$

Esercizio 5.

a. Derivate il sequente $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash \exists x(\,A(x) \to \forall x B(x)\,)$ in LK.

b. Riscrivete in forma di Skolem la formula $\forall z(\,\forall x \exists z A(x,z) \to \forall x A(x,z)\,)$.

Linguaggio Quotidiano

Esercizio 6. Tratto da *Symbolic Logic* di Lewis Carroll (C.L. Dodgson).
Aldo, Bruno e Corrado lavorano nella bottega di un barbiere. Almeno uno di loro deve rimanere all'interno per badare al negozio, così:

"Se Corrado è fuori dal negozio, allora se Aldo è fuori, Bruno è dentro."

Aldo è troppo nervoso per uscire senza Bruno, perciò:

"Se Aldo è fuori dal negozio, allora anche Bruno lo è."

Se deduciamo che Corrado non può mai uscire, stiamo facendo un ragionamento corretto?

Formalizzate le due precedenti asserzioni utilizzando la logica proposizionale (ad esempio prendete la formula atomica A per *"Aldo è fuori"* e $\neg A$ per *"Aldo è dentro"*) e giustificate la vostra risposta.

Esercizio 7.
Considerate il dominio $\mathcal{D}$ delle persone. Formalizzate le seguenti asserzioni nel linguaggio della logica dei predicati usando l'interpretazione indicata:

Simbolo	*Interpretazione*	
a	*"Anna"*	(costante)
b	*"Bruno"*	(costante)
C	*"è un cantautore"*	(predicato di arità 1)
I	*"è italiano"*	(predicato di arità 1)
A	*"adora"*	(predicato di arità 2)
D	*"detesta"*	(predicato di arità 2)

a. *"Bruno adora tutti i cantautori italiani."*

b. *"Bruno adora solo i cantautori italiani."*

c. *"Anna e Bruno adorano gli stessi cantautori."*

d. *"Anna detesta qualche cantautore che Bruno adora."*

e. *"Non tutti adorano i cantautori italiani."*

f. *"Ci sono degli italiani che detestano tutti i cantautori adorati da Bruno."*

g. *"Anna e Bruno sono gli unici due cantautori italiani."*

h. *"Bruno è l'unico cantautore italiano che Anna non detesti."*