Logica Matematica
Anno Accademico 2010/2011
Esercitazione di preparazione all'esame

Correzione

Nota. *Questa è la prova di esame assegnata in un corso di Logica del 2007/08. È quindi da prendere come indicativa. Lo scritto dell'esame per il corso 2010/2011 coprirà tutto il programma trattato a lezione, in particolare i modelli per LJ che non sono stati trattati nel 2007/08. A questo proposito si osservi che l'esercizio* 2.b *più essere risolto presentando un contromodello.*

Esercizio 1.

Considerate connettivo $\rhd$ introdotto nel calcolo proposizionale dalla seguente equazione definitoria:

$$\Gamma \vdash A \rhd B \quad \textit{se e solo se} \quad \Gamma \vdash B \ \textit{e} \ \Gamma, A \vdash B$$

a. Risolvete tale equazione definitoria. Ovvero: trovate delle "buone" regole da aggiungere al calcolo dei sequenti che siano *equivalenti* all'equazione.

b. Si può definire il connettivo $\rhd$ utilizzando i connettivi usuali del calcolo di sequenti? Ovvero: si può definire una formula P (ottenuta combinando le formule A, B utilizzando i connettivi usuali) in modo da dimostrare che P è equivalente a $A \rhd B$ utilizzando le usuali equazioni definitorie?

Svolgimento

Punto a. Il verso da dx a sx dell'equazione fornisce direttamente la regola di $\rhd$*formazione*:

$$\frac{\Gamma \vdash B \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rhd B}$$

Il viceversa fornisce le regole di $\rhd$*riflessione implicita*:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rhd B}{\Gamma \vdash B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \rhd B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Queste regole non rispettano la proprietà della sottoformula, quindi un calcolo con tali regole non ammetterebbe il teorema di eliminazione dei tagli. Dobbiamo quindi raffinare le regole. Banalizzando le premesse (e cioè prendendo le identità $A \rhd B \vdash A \rhd B$), otteniamo gli *assiomi* per $\rhd$:

$$A \rhd B \vdash B \qquad A \rhd B, A \vdash B$$

Per far vedere l'equivalenza tra assiomi e riflessione implicita, ci manca da mostrare che dagli assiomi per $\rhd$ otteniamo le regole di $\rhd$riflessione implicita. Possiamo sfruttare le regole di taglio. Ecco le derivazioni:

$$\frac{\Gamma \vdash A \rhd B \quad \dfrac{}{A \rhd B \vdash B}\,ax}{\Gamma \vdash B}\,cut \qquad \frac{\Gamma \vdash A \rhd B \quad \dfrac{}{A \rhd B, A \vdash B}\,ax}{\Gamma, A \vdash B}\,cut$$

Dagli assiomi possiamo finalmente derivare le regole di $\rhd$*riflessione esplicita*:

$$\frac{\dfrac{}{A \rhd B \vdash B}\,ax \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rhd B \vdash \Delta}\,cut \qquad \frac{\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \quad \dfrac{}{A \rhd B, A \vdash B}\,ax}{\Gamma_1, A \rhd B \vdash B}\,cut \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta}{\Gamma_1, A \rhd B, \Gamma_2 \vdash \Delta}\,cut$$

Per la precisione, le due regole di $\rhd$*riflessione esplicita* sono:

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rhd B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash A \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta}{\Gamma_1, A \rhd B, \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

Per chiudere l'equivalenza ci basta derivare gli assiomi utilizzando le riflessioni esplicite. Basta utilizzare le identità $B \vdash B$ e $A \vdash A$

$$\frac{B \vdash B}{A \rhd B \vdash B} \qquad \frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A \rhd B, A \vdash B}$$

Punto b. Sfruttiamo le equazioni definitorie per $\to$ e $\wedge$:

$$
\begin{array}{llll}
\Gamma \vdash A \rhd B & \textit{se e solo se} & \Gamma \vdash B \ \ e \ \ \Gamma, A \vdash B & \text{(per definizione)} \\
 & \textit{se e solo se} & \Gamma \vdash B \ \ e \ \ \Gamma \vdash A \to B & \text{(equazione definitoria di } \to) \\
 & \textit{se e solo se} & \Gamma \vdash B \wedge (A \to B) & \text{(equazione definitoria di } \wedge)
\end{array}
$$

Possiamo quindi affermare che $A \rhd B$ è equivalente a $\Gamma \vdash B \wedge (A \to B)$. Inoltre, in LJ si può provare che $A \rhd B \equiv B$.

Esercizio 2.

a. Derivate il sequente $(A \to B) \vee (A \to C) \vdash (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$ in LJ.

b. Discutete perché il sequente $\vdash A \vee \neg A$ non è derivabile in LJ.

c. Derivate il sequente $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ in LJ.

Svolgimento

Punto a.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash A}{\neg B, A \vdash A}\;\mathit{ind.}
\quad
\dfrac{\dfrac{B \vdash B}{B, A \vdash B}\;\mathit{ind.}}{B, \neg B, A \vdash \bot}\;\neg \mathit{rifl.}
}{(A \to B), \neg B, A \vdash \bot}\;\to \mathit{rifl.}
}{(A \to B), \neg B \wedge \neg C, A \vdash \bot}\;\wedge \mathit{rifl.}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash A}{\neg C, A \vdash A}\;\mathit{ind.}
\quad
\dfrac{\dfrac{C \vdash C}{C, A \vdash C}\;\mathit{ind.}}{C, \neg C, A \vdash \bot}\;\neg \mathit{rifl.}
}{(A \to C), \neg C, A \vdash \bot}\;\to \mathit{rifl.}
}{(A \to C), \neg B \wedge \neg C, A \vdash \bot}\;\wedge \mathit{rifl.}
}{(A \to B) \vee (A \to C), \neg B \wedge \neg C, A \vdash \bot}\;\vee \mathit{form.}
}{(A \to B) \vee (A \to C), \neg B \wedge \neg C \vdash \neg A}\;\neg \mathit{form.}
}{(A \to B) \vee (A \to C) \vdash (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A}\;\to \mathit{form.}
$$

Punto b. Assumiamo che il sequente $\vdash A \vee \neg A$ sia derivabile in LJ. Grazie al teorema di eliminazione dei tagli possiamo affermare che in questo caso esiste una derivazione in LJ in cui non compaiono regole di taglio. Consideriamo allora una derivazione di $\vdash A \vee \neg A$ in LJ che non usa tagli e ragioniamo sull'ultima regola che può essere stata applicata:

- Non può essere una identità perché il sequente non è della forma $B \vdash B$.
- Non può essere un assioma (per il $\top$ o per il $\bot$) perché il sequente non è della forma adatta.
- Non può essere una regola strutturale. In LJ le regole strutturali lavorano solo alla sinistra del sequente. In questo caso le premesse del sequente sono vuote: non può essere stato applicato *indebolimento*, che avrebbe introdotto almeno una formula, e non può essere stato applicata *contrazione*, che avrebbe lasciato almeno una occorrenza della formula contratta.
- L'unica regola possibile è quella che introduce il connettivo principale della formula alla destra del sequente. Il connettivo in questione è $\vee$. Quindi l'unica regola possibile è $\wedge$*riflessione esplicita*. In questo caso abbiamo due possibilità:

$$
\dfrac{\vdash A}{\vdash A \vee \neg A} \qquad \dfrac{\vdash \neg A}{\vdash A \vee \neg A}
$$

  ma nessuna delle due premesse è derivabile (nemmeno in LK). Sfruttiamo il teorema di correttezza. Basta prendere l'interpretazione $v(A) = 0$ per avere un contromodello per $\vdash A$, e l'interpretazione $v(A) = 1$ per avere un contromodello per $\vdash \neg A$.

Visto che abbiamo esaurito tutte le possibilità per le regole applicate nella derivazione, possiamo concludere che *non esiste* una derivazione per $\vdash A \vee \neg A$ in LJ.

Punto c.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{A \vdash A}{A \vdash A \vee \neg A}\;\vee \mathit{rifl.}
}{\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot}\;\neg \mathit{rifl.}
}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A}\;\neg \mathit{form.}
}{\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A}\;\vee \mathit{rifl.}
}{\neg(A \vee \neg A), \neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\;\neg \mathit{rifl.}
}{\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot}\;\mathit{contr.}
}{\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)}\;\neg \mathit{form.}
$$

Esercizio 3.

Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Giustificate le vostre risposte.

a. $P \models Q \wedge R$ se e solo se $P \models Q$ e $P \models R$

b. $P \models Q \vee R$ se e solo se $P \models Q$ oppure $P \models R$

c. $P \models Q$ se e solo se $\neg Q \models \neg P$

Svolgimento.

Ci sono due modi per svolgere questo esercizio: *(i)* considerando direttamente la definizione di $\models$, oppure *(ii)* sfruttando i teoremi di correttezza e completezza. Vediamoli in dettaglio.

(i) La definizione semantica dice che:

$$A \models B \quad \text{se e solo se} \quad \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(A) \leq v(B)$$

Punto a. È vero, infatti:

$$\begin{array}{lll} P \models Q \wedge R & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q \wedge R) \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq min\{v(Q), v(R)\} \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q) \text{ e } v(P) \leq v(R) \\ & \text{se e solo se } \textit{(!)} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q) \text{ e} \\ & & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(R) \\ & \text{se e solo se} & P \models Q \text{ e } P \models R \end{array}$$

Notate in particolare che l'equivalenza *(!)* vale grazie al fatto che, ragionando classicamente, abbiamo $\forall v(A(v) \wedge B(v)) \equiv \forall vA(v) \wedge \forall vB(v)$.

Punto b. È falso, infatti:

$$\begin{array}{lll} P \models Q \vee R & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q \vee R) \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq max\{v(Q), v(R)\} \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q) \text{ oppure } v(P) \leq v(R) \end{array}$$

In questo caso non possiamo più continuare la serie delle equivalenze come al punto a. Infatti possiamo solo dire che, presa una qualsiasi interpretazione v, siamo sicuri che $v(P) \leq v(Q)$ oppure $v(P) \leq v(R)$. Questo non significa che una delle due possibilità vale per tutte le interpretazioni! Per una interpretazione può essere vero che $v(P) \leq v(Q)$ e per un'altra $v(P) \leq v(R)$. *Non possiamo concludere* che

$$\text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q) \text{ oppure per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(R)$$

come richiesto dalla definizione di "$P \models Q$ oppure $P \models R$".

Notate che tutto il ragionamento si basa sul fatto che $\forall v(A(v) \vee B(v)) \not\equiv \forall vA(v) \vee \forall vB(v)$.

Punto c. È vero, infatti:

$$\begin{array}{lll} P \models Q & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(P) \leq v(Q) \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } -v(Q) \leq -v(P) \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } 1 - v(Q) \leq 1 - v(P) \\ & \text{se e solo se} & \text{per ogni interpretazione } v \text{ si ha } v(\neg Q) \leq v(\neg P) \\ & \text{se e solo se} & \neg Q \models \neg P \end{array}$$

(ii) Sfruttando i teoremi di correttezza e completezza, possiamo riscrivere l'esercizio utilizzando i sequenti e utilizzare il calcolo LK. In questo caso, i punti da verificare diventano:

a. $P \vdash Q \wedge R$ è derivabile in LK se e solo se $P \vdash Q$ e $P \vdash R$ sono derivabili in LK.

b. $P \vdash Q \vee R$ è derivabile in LK se e solo se $P \vdash Q$ oppure $P \vdash R$ sono derivabili in LK.

c. $P \vdash Q$ è derivabile in LK se e solo se $\neg Q \vdash \neg P$ è derivabile in LK.

Punto a. Se $P \vdash Q \wedge R$ è derivabile in LK, allora $P \vdash Q$ e $P \vdash R$ sono derivabili in LK. Basta usare $\wedge$*riflessione* e un taglio:

$$\dfrac{P \vdash Q \wedge R \quad \dfrac{Q \vdash Q}{Q \wedge R \vdash Q}}{P \vdash Q} \qquad\qquad \dfrac{P \vdash Q \wedge R \quad \dfrac{R \vdash R}{Q \wedge R \vdash R}}{P \vdash R}$$

Viceversa. Se $P \vdash Q$ e $P \vdash R$ sono derivabili in LK, allora $P \vdash Q \wedge R$ è derivabile in LK. Basta usare $\wedge$*formazione*:

$$\dfrac{P \vdash Q \quad P \vdash R}{P \vdash Q \wedge R}$$

Punto b. Assumiamo che questa affermazione sia vera. Il verso da sx a dx dice che se $P \vdash Q \vee R$ è derivabile in LK, allora $P \vdash Q$ oppure $P \vdash R$ sono derivabili in LK. Prendiamo in particolare $P = Q \vee R$. Visto che $Q \vee R \vdash Q \vee R$ è derivabile in LK, dovrebbe essere che $Q \vee R \vdash Q$ è derivabile in LK oppure $Q \vee R \vdash R$ è derivabile in LK. Ma nessuno dei due sequenti è derivabile in LK. Infatti: $v(Q) = 0$ e $v(R) = 1$ è contromodello per $Q \vee R \vdash Q$, mentre $v(Q) = 1$ e $v(R) = 0$ è contromodello per $Q \vee R \vdash R$.

Concludiamo quindi che l'affermazione al punto b. non può essere vera.

Punto c. Se $P \vdash Q$ è derivabile in LK, allora $\neg Q \vdash \neg P$ è derivabile in LK. Basta usare $\neg$*riflessione* e $\neg$*formazione*:

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash Q}{P, \neg Q \vdash \bot}}{\neg Q \vdash \neg P}$$

Viceversa. Se $\neg Q \vdash \neg P$ è derivabile in LK, allora $P \vdash Q$ è derivabile in LK.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P \quad \dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash \bot}\,\neg\mathit{rifl.}}{P, \neg Q \vdash \bot}\,\mathit{cut}}{P \vdash \neg\neg Q}\,\neg\mathit{form.} \quad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q}{\vdash \neg Q, Q}\,\neg\mathit{form.}}{\neg\neg Q \vdash Q}\,\neg\mathit{rifl.}}{P \vdash Q}\,\mathit{cut}$$

Altro modo per derivarlo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P \vdash P}{P, \neg P \vdash \bot}\,\neg\mathit{rifl.}}{P \vdash \neg\neg P}\,\neg\mathit{form.} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P}{\neg\neg P, \neg Q \vdash \bot}\,\neg\mathit{rifl.}}{\neg\neg P \vdash \neg\neg Q}\,\neg\mathit{form.} \quad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q}{\vdash \neg Q, Q}\,\neg\mathit{rifl.}}{\neg\neg Q \vdash Q}\,\neg\mathit{form.}}{\neg\neg P \vdash Q}\,\mathit{cut.}}{P \vdash Q}\,\mathit{cut}$$

Esercizio 4.

Fornite una derivazione in LJ dei sequenti elencati. Nel caso non sia possibile, discutete perché non esiste una derivazione in LJ e fornitene una in LK. Se non è possibile dare una derivazione neppure in LK, presentate un contro-modello.

a. $\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \vdash \forall x\,(\,A(x) \lor B(x)\,)$

b. $\vdash \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)$

c. $\vdash \exists x\,(\,A(x) \land \neg\exists x A(x)\,)$

Svolgimento

Punto a. Derivabile in LJ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(y) \vdash A(y)}{\forall x A(x) \vdash A(y)}\,\forall\textit{rifl.}}{\forall x A(x) \vdash A(y) \lor B(y)}\,\lor\textit{rifl.} \qquad \dfrac{\dfrac{B(y) \vdash B(y)}{\forall x B(x) \vdash B(y)}\,\forall\textit{rifl.}}{\forall x B(x) \vdash A(y) \lor B(y)}\,\lor\textit{rifl.}}{\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \vdash A(y) \lor B(y)}\,\lor\textit{form.}}{\forall x A(x) \lor \forall x B(x) \vdash \forall x\,(\,A(x) \lor B(x)\,)}\,\forall\textit{form.}$$

Punto b. Non derivabile in LJ. Infatti, consideriamo un predicato A in cui la variabile x *non* compare libera. In questo caso $A = A(x)$, e in LJ si può derivare $\exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,) \vdash A \lor \neg A$ (Esercizio! Notate che in questo caso $A(x) = A(y) = A$ visto che x non compare libera in A). Ora, se $\vdash \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)$ fosse derivabile in LJ, allora con un taglio otterremmo $\vdash A \lor \neg A$ derivabile in LJ e questo è impossibile per quanto visto all'esercizio 2. *Un'altro approccio*, anch'esso valido, è quello di considerare le varie regole che possono essere applicate in una eventuale derivazione in LJ – il ragionamento da fare è analogo a quello dell'esercizio 2.

In LK, invece, il sequente è derivabile:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(z) \vdash A(z)}{\dfrac{}{A(z) \vdash A(y), A(z), \neg\exists x A(x)}}\,\textit{ind.}}{A(z) \vdash A(y), A(z) \lor \neg\exists x A(x)}\,\lor\textit{rifl.}\text{ (in LK-II)}}{A(z) \vdash A(y), \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\exists\textit{rifl.}}{\exists x A(x) \vdash A(y), \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\exists\textit{form.}}{\vdash A(y), \neg\exists x A(x), \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\neg\textit{form.}}{\vdash A(y) \lor \neg\exists x A(x), \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\lor\textit{rifl.}\text{ (in LK-II)}}{\vdash \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,), \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\exists\textit{rifl.}}{\vdash \exists x\,(\,A(x) \lor \neg\exists x A(x)\,)}\,\textit{contr.}$$

Punto c. Il sequente non è derivabile nemmeno in LK. Come contromodello pensate all'insieme delle persone e prendete $A(x)$ il predicato che dice *"x è un maschio"*. La formula in questione direbbe *"esiste un individuo maschio e non esiste un individuo maschio"* e risulta chiaramente falsa.

Un'altro modo per mostrare che il sequente non è derivabile è quello di sfruttare le equivalenze per le formule in LK. Basta osservare che $\exists x\,(\,A(x) \land \neg\exists x A(x)\,) \equiv \exists x\, A(x) \land \neg\exists x A(x)$ (vi ricordo che x è libera in $\neg\exists x A(x)$). Chiaramente $\exists x\, A(x) \land \neg\exists x A(x) \vdash \bot$ è derivabile in LK. Quindi se $\vdash \exists x\,(\,A(x) \land \neg\exists x A(x)\,)$ fosse derivabile in LK otterremmo $\vdash \bot$ derivabile in LK. E questo è impossibile.

Esercizio 5.

a. Derivate il sequente $\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$ in LK.

b. Riscrivete in forma di Skolem la formula $\forall z(\, \forall x \exists z A(x,z) \to \forall x A(x,z)\,)$.

Svolgimento

Punto a. Il sequente rappresenta uno dei versi delle equivalenze fondamentali che sono usate per ottenere la forma normale prenessa delle formule predicative nella logica classica. Vediamo due derivazioni plausibili.
La prima usa *contrazione* a dx.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A(w) \vdash A(w)$}
\RightLabel{\textit{ind.}}
\doubleLine
\UnaryInfC{$A(z), A(w) \vdash A(w), B(y), \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\to$\textit{form.}}
\UnaryInfC{$A(z) \vdash A(w), B(y), A(w) \to \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\exists$\textit{rifl.}}
\UnaryInfC{$A(z) \vdash A(w), B(y), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\forall$\textit{form.}}
\UnaryInfC{$A(z) \vdash \forall x A(x), B(y), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\AxiomC{$B(y) \vdash B(y)$}
\RightLabel{\textit{ind.}}
\doubleLine
\UnaryInfC{$B(y), A(z) \vdash B(y), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\forall$\textit{rifl.}}
\UnaryInfC{$\forall x B(x), A(z) \vdash B(y), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\to$ \textit{rifl.}}
\BinaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x), A(z) \vdash B(y), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\forall$\textit{form.}}
\UnaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x), A(z) \vdash \forall x B(x), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\to$ \textit{form.}}
\UnaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash A(z) \to \forall x B(x), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\exists$\textit{rifl.}}
\UnaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{\textit{contr.}}
\UnaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\end{prooftree}
$$

La seconda usa $\to$*riflessione* con contesto a dx.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A(z) \vdash A(z)$}
\RightLabel{\textit{ind.}}
\UnaryInfC{$A(z) \vdash A(z) \to \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\to$ \textit{form.}}
\UnaryInfC{$\vdash A(z), A(z) \to \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\exists$\textit{rifl.}}
\UnaryInfC{$\vdash A(z), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\forall$\textit{form.}}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x A(x), \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\AxiomC{$\forall x B(x) \vdash \forall x B(x)$}
\RightLabel{\textit{ind.}}
\UnaryInfC{$\forall x B(x), A(y) \vdash \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\to$ \textit{form.}}
\UnaryInfC{$\forall x B(x) \vdash A(y) \to \forall x B(x)$}
\RightLabel{$\exists$\textit{rifl.}}
\UnaryInfC{$\forall x B(x) \vdash \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\RightLabel{$\to$ \textit{rifl.}}
\BinaryInfC{$\forall x A(x) \to \forall x B(x) \vdash \exists x(\, A(x) \to \forall x B(x)\,)$}
\end{prooftree}
$$

Punto b. Cerchiamo prima la forma normale prenessa:

$$
\begin{aligned}
\forall z(\, \forall x \exists z A(x,z) \to \forall x A(x,z)\,) &\equiv \forall z(\, \forall x \exists y A(x,y) \to \forall w A(w,z)\,) \\
&\equiv \forall z \exists x(\, \exists y A(x,y) \to \forall w A(w,z)\,) \\
&\equiv \forall z \exists x \forall y(\, A(x,y) \to \forall w A(w,z)\,) \\
&\equiv \forall z \exists x \forall y \forall w(\, A(x,y) \to A(w,z)\,)
\end{aligned}
$$

Ora possiamo prendere un segno di funzione f di arità 1 e otteniamo la forma di Skolem:

$$\forall z \forall y \forall w(\, A(f(z),y) \to A(w,z)\,)$$

Esercizio 6.

Aldo, Bruno e Corrado lavorano nella bottega di un barbiere. Almeno uno di loro deve rimanere all'interno per badare al negozio, così:

"Se Corrado è fuori dal negozio, allora se Aldo è fuori, Bruno è dentro."

Aldo è troppo nervoso per uscire senza Bruno, perciò:

"Se Aldo è fuori dal negozio, allora anche Bruno lo è."

Se deduciamo che Corrado non può mai uscire, stiamo facendo un ragionamento corretto?

Formalizzate le due precedenti asserzioni utilizzando la logica proposizionale (ad esempio prendete la formula atomica A per *"Aldo è fuori"* e $\neg A$ per *"Aldo è dentro"*) e giustificate la vostra risposta.

Svolgimento

Prendiamo le proposizioni:

A	*"Aldo è fuori."*	da cui	$\neg A$	*"Aldo è dentro."*
B	*"Bruno è fuori."*	da cui	$\neg B$	*"Bruno è dentro."*
C	*"Corrado è fuori."*	da cui	$\neg C$	*"Corrado è dentro."*

Con esse possiamo formalizzare le asserzioni:

$C \to (A \to \neg B)$	*"Se Corrado è fuori dal negozio, allora se Aldo è fuori, Bruno è dentro."*
$A \to B$	*"Se Aldo è fuori dal negozio, allora anche Bruno lo è."*

Se deduciamo che Corrado non può mai uscire, significa che riusciamo a derivare il sequente

$$C \to (A \to \neg B), A \to B \vdash \neg C \tag{1}$$

ma questo non è possibile. Possiamo mostrarlo formalmente grazie al teorema di correttezza che dice: se un sequente è derivabile in LK allora è valido in ogni interpretazione. Ci basta fornire un contromodello. Intuitivamente Corrado può uscire a patto che Aldo stia dentro, e a quel punto Bruno può fare quello che vuole. In dettaglio, se prendiamo l'interpretazione

$$v(A) = 0 \qquad v(B) = 1 \quad v(C) = 1$$

otteniamo

$$v(\,C \to (A \to \neg B)\,) = 1 \qquad v(A \to B) = 1 \qquad v(\neg C) = 0$$

quindi

$$min\{v(\,C \to (A \to \neg B)\,), v(A \to B)\} \nleq v(\neg C)$$

e questo ci dice che il sequente (1) non è derivabile: non è corretto dedurre che corrado non può mai uscire.

Un'altro contromodello è:

$$v(A) = 0 \qquad v(B) = 0 \quad v(C) = 1$$

Esercizio 7.

Considerate il dominio $\mathcal{D}$ delle persone. Formalizzate le asserzioni seguenti nel linguaggio della logica dei predicati usando l'interpretazione indicata:

Simbolo	*Interpretazione*	
a	*"Anna"*	(costante)
b	*"Bruno"*	(costante)
C	*"è un cantautore"*	(predicato di arità 1)
I	*"è italiano"*	(predicato di arità 1)
A	*"adora"*	(predicato di arità 2)
D	*"detesta"*	(predicato di arità 2)

a. *"Bruno adora tutti i cantautori italiani."*

b. *"Bruno adora solo i cantautori italiani."*

c. *"Anna e Bruno adorano gli stessi cantautori."*

d. *"Anna detesta qualche cantautore che Bruno adora."*

e. *"Non tutti adorano i cantautori italiani."*

f. *"Ci sono degli italiani che detestano tutti i cantautori adorati da Bruno."*

g. *"Anna e Bruno sono gli unici due cantautori italiani."*

h. *"Bruno è l'unico cantautore italiano che Anna non detesti."*

Svolgimento

Definiamo il predicato

$$CI(x) = C(x) \wedge I(x) \quad \text{“ } x \text{ è un cantautore italiano.”}$$

che ci sarà utile nelle formalizzazioni.

Punto a. *"Bruno adora tutti i cantautori italiani."*

$$\forall x(\, CI(x) \rightarrow A(b,x)\,)$$

Punto b. *"Bruno adora solo i cantautori italiani."* Due possibili interpretazioni:

1. Tra tutti i cantautori, Bruno adora solo quelli italiani. Ma può adorare anche qualche altra persona che non sia un cantautore (che ne so: un poeta, un attore...).

$$\forall x(\,(\,C(x) \wedge A(b,x)\,) \rightarrow I(x)\,)$$

   che è equivalente a

$$\forall x(\,C(x) \rightarrow (\,A(b,x) \rightarrow I(x)\,)\,)$$

   e a

$$\forall x(\,A(b,x) \rightarrow (\,C(x) \rightarrow I(x)\,)\,)$$

2. Tra tutte le persone, Bruno adora solo i cantautori italiani. Non può adorare nessun altro che non sia cantautore italiano

$$\forall x(\,A(b,x) \rightarrow CI(x)\,)$$

Punto c. *"Anna e Bruno adorano gli stessi cantautori."*

$$\forall x(\,C(x) \rightarrow (\,(A(b,x) \rightarrow A(a,x)) \wedge (A(a,x) \rightarrow A(b,x))\,)\,)$$

O equivalentemente:

$$\forall x(\,(C(x) \wedge A(b,x)) \rightarrow A(a,x)\,) \wedge \forall x(\,(C(x) \wedge A(a,x)) \rightarrow A(b,x)\,)$$

Osservate che scrivere

$$\forall x(\,(A(b,x) \rightarrow A(a,x))\,) \wedge \forall x(\,(A(a,x) \rightarrow A(b,x))\,)$$

significa *"Anna e Bruno adorano le stesse persone."*

Punto d. *"Anna detesta qualche cantautore che Bruno adora."*

$$\exists x(\, C(x) \wedge A(b, x) \wedge D(a, x)\,)$$

Punto e. *"Non tutti adorano i cantautori italiani."*

1. Interpretazione: *"Non tutti adorano tutti i cantautori italiani."*

   $$\neg\forall x \forall y(\, CI(y) \to A(x, y)\,)$$

   che classicamente è equivalente a

   $$\exists x \neg(\, \forall y(CI(y) \to A(x, y))\,)$$

2. Interpretazione *"Qualcuno non adora qualche cantautore italiano."*

   $$\exists x \exists y(\, CI(y) \wedge \neg A(x, y)\,)$$

   Notate che anche questa formule è classicamente equivalente alle due precedenti.

3. Interpretazione *"Qualcuno odia tutti i cantautori italiani."*

   $$\exists x \forall y(\, CI(y) \to \neg A(x, y)\,)$$

Punto f. *"Ci sono degli italiani che detestano tutti i cantautori adorati da Bruno."*

$$\exists x(\, I(x) \wedge \forall y(\,(C(y) \wedge A(b, y)) \to D(x, y)\,)\,)$$

Punto g. *"Anna e Bruno sono gli unici due cantautori italiani."*

$$CI(a) \wedge CI(b) \wedge \forall x(\, CI(x) \to (x = a \vee x = b)\,)$$

Punto h. *"Bruno è l'unico cantautore italiano che Anna non detesti."*

$$CI(b) \wedge \neg D(a, b) \wedge \forall x(\,(CI(x) \wedge \neg D(a, x)) \to x = b\,)$$