Calcolo dei Sequenti: i sistemi LJ e LK

damiano.macedonio@univr.it

Linguaggio. Le lettere maiuscole $P, Q, R, \dots$ indicano le *proposizioni atomiche*, cioè quelle che non sono date dalla composizione di altre proposizioni mediante i connettivi. Le lettere $A, B, C, \dots$ indicano le proposizioni composte. I *connettivi* logici sono: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Le *costanti* logiche sono: $\top, \bot$. Si usano inoltre le parentesi ( ) come simboli ausiliari, per specificare l'associazione tra connettivi.

Formule ben formate. L'insieme delle formule ben formate è generato dalla seguente produzione:

1. ogni formula atomica $P, Q, R, \dots$ è una formula ben formata;
2. le costanti logiche $\top$ e $\bot$ sono formule ben formate;
3. Se A è una formula ben formata, allora anche $\neg A$ è una formula ben formata;
4. Se A e B sono formule ben formate, allora $A \wedge B$, $A \vee B$ e $A \rightarrow B$ sono formule ben formate.

Ad esempio per mostrare che $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge R)$ è una formula ben formata dobbiamo dire che P, Q, R sono formule ben formate perché atomiche, quindi anche $(P \vee Q)$ e $(R \wedge R)$ sono ben formate, infine ciò comporta che anche $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge R)$ è una formula ben formata. Una formula ben formata, in breve *bf*, può essere dimostrata tale con una derivazione. Le regole da applicare sono

$$\frac{}{P\ bf} \qquad \frac{}{\bot\ bf} \qquad \frac{}{\top\ bf} \qquad \frac{A\ bf}{\neg A\ bf} \qquad \frac{A\ bf \quad B\ bf}{A \wedge B\ bf} \qquad \frac{A\ bf \quad B\ bf}{A \vee B\ bf} \qquad \frac{A\ bf \quad B\ bf}{A \rightarrow B\ bf}$$

Attenzione: queste sono semplicemente regole sintattiche di *buona formazione* delle formule: non hanno nulla a che fare con la semantica! Con queste regole ecco come si mostra che $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge R)$ è *bf*:

$$\frac{\dfrac{P\ bf \quad Q\ bf}{(P \vee Q)\ bf} \qquad \dfrac{R\ bf \quad R\ bf}{(R \wedge R)\ bf}}{(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge R)\ bf}$$

Sequenti. Un *sequente* è una espressione del tipo $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m$. In generale si usano le lettere greche maiuscole $\Gamma, \Delta, \dots$ per esprimere sequenze finite (anche vuote) di formule ben formate, e i sequenti si indicano con $\Gamma \vdash \Delta$.

Anatomia di una regola. Le regole del calcolo sono date nelle tabelle seguenti. Vediamo un po' di notazioni. Consideriamo come esempio questa regola:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$$

Il sequente $\Gamma, A \vee B \vdash \Delta$ è la *conclusione* della regola, i due sequenti $\Gamma, A \vdash \Delta$ e $\Gamma, B \vdash \Delta$ sono le *premesse*.

Questa regola *introduce* a sinistra la formula $A \vee B$, che chiamiamo *formula principale* della regola. Chiamiamo Γ il *contesto* di $A \vee B$.

Derivazione. Una *derivazione* in LJ (rispettivamente LK) è un albero finito con radice unica, in cui i nodi sono (etichettati con) sequenti. I sequenti alle foglie, scritti in alto, devono essere identità (della forma $A \vdash A$) o assiomi (come quelli per $\bot$ e $\top$). Ogni sequente che non è una foglia deve essere ottenuto dai sequenti immediatamente sopra di esso applicando una delle regole di inferenza del calcolo LJ (rispettivamente LK).

Sequente Derivabile. Un sequente è *derivabile* in LJ (rispettivamente LK) se il sequente è radice di una derivazione in LJ (rispettivamente in LK).

Osservazione. Il calcolo LK è una estensione di LJ. Quindi le regole di LJ sono ammissibili anche in LK. Ne segue che ogni sequente derivabile in LJ è derivabile anche in LK. Viceversa, se un sequente *non* è derivabile in LK, allora non è derivabile neppure in LJ.

Tabella 1 Equazioni Definitorie

$(\wedge)$	$\Gamma \vdash A \wedge B$	se e solo se	$\Gamma \vdash A$ $\underline{\text{e}}$ $\Gamma \vdash B$
$(\vee)$	$A \vee B \vdash \Delta$	se e solo se	$A \vdash \Delta$ $\underline{\text{e}}$ $B \vdash \Delta$
$(\rightarrow)$	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	se e solo se	$\Gamma, A \vdash B$

Tabella 2 Calcolo dei sequenti di base

Identità

$$A \vdash A$$

Regole di Taglio

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}\ sx \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta' \quad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}\ dx$$

Connettivi Logici

$$\frac{A \vdash \Delta}{A \wedge B \vdash \Delta} \quad \frac{B \vdash \Delta}{A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\ \textit{rifl. espl.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\ \textit{form.}$$

$$\frac{A \vdash \Delta \quad B \vdash \Delta}{A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\ \textit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\ \textit{rifl. espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow\ \textit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Gamma' \vdash \Delta} \rightarrow\ \textit{rifl. espl.}$$

Costanti Logiche

$$\bot \vdash \Delta \quad \bot\ ax \qquad\qquad \Gamma \vdash \top \quad \top\ ax$$

Tabella 3 Regole strutturali

Scambio

$$\frac{\Gamma, A, B, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Gamma' \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Delta'}$$

Indebolimento

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A, \Delta'}$$

Contrazione

$$\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A, \Delta'}$$

Tabella 4 Negazione

Definiamo $\neg A \stackrel{def}{=} A \to \bot$. Dalle regole dell'implicazione e l'assioma per il $\bot$ otteniamo le seguenti regole

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\ \mathit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\ \mathit{rifl.\ espl.}$$

Tabella 5 Calcolo LJ intuizionistico (contesto libero a sinistra)

Il calcolo LJ (intuizionistico) produce sequenti della forma $\Gamma \vdash C$ (una sola formula nelle conclusioni del sequente). Per ottenere il calcolo dei sequenti LJ si devono quindi considerare le regole di base – Tab. 2 – e quelle per la negazione – Tab. 4 – con contesto libero a sx e una sola assunzione a dx del sequente. Servono inoltre le regole strutturali – Tab. 3 – considerando solo quelle che coinvolgono la parte sx del sequente.

Identità

$$A \vdash A$$

Regola di Taglio

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Connettivi Logici

$$\frac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}\ \wedge\ \mathit{rifl.\ espl.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge\ \mathit{form.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}\ \vee\ \mathit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\ \mathit{rifl.\ espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\ \mathit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}\ \to\ \mathit{rifl.\ espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg\ \mathit{form.} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash C}\ \neg\ \mathit{rifl.\ espl.}$$

Costanti Logiche

$$\Gamma, \bot \vdash C \quad \bot\ \mathit{ax} \qquad\qquad\qquad \Gamma \vdash \top \quad \top\ \mathit{ax}$$

Regole Strutturali

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, B, A \vdash C}\ \mathit{scambio}$$

$$\frac{\Gamma \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ \mathit{indebolimento}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash C}{\Gamma, A \vdash C}\ \mathit{contrazione}$$

Tabella 6 Calcolo LK classico (contesto libero a sinistra e a destra)

Il calcolo LK (classico) produce sequenti della forma $\Gamma \vdash \Delta$ (sequenze di assunzioni sia a dx che a sx del sequente). Per ottenere il calcolo dei sequenti LJ si devono quindi considerare le regole di base – Tab. 2 – e quelle per la negazione – Tab. 4 – con contesto libero a sx e a dx del sequente. Servono inoltre tutte le regole strutturali – Tab. 3.

Identità

$$A \vdash A$$

Regola di Taglio

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', A \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Connettivi Logici

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \textit{ rifl. espl.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} \wedge \textit{ form.}$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \wedge \textit{ rifl. espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \vee \textit{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee \textit{ rifl. espl.}$$

$$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} \vee \textit{ rifl. espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta} \to \textit{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \to \textit{ rifl. espl.}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} \neg \textit{ form.} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \neg \textit{ rifl. espl.}$$

Costanti Logiche

$$\Gamma, \bot \vdash \Delta \quad \bot \textit{ ax} \qquad \Gamma \vdash \top, \Delta \quad \top \textit{ ax}$$

Regole Strutturali

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta} \qquad \textit{scambio} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash B, A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \textit{indebolimento} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta} \qquad \textit{contrazione} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}$$