# Semantica di Kripke per LJ

damiano.macedonio@univr.it

17 gennaio 2011

**Formule proposizionali.** Consideriamo il linguaggio proposizionale $\mathcal{F}$, delle proposizioni (o formule ben formate) $A, B, C, \ldots$ generate induttivamente. Innanzitutto ammettiamo due proposizioni *costanti* $\perp$ e $\top$ e delle proposizioni primitive $P, Q, R, \ldots$ (l'insieme degli *atomi*) che rappresentano gli ingredienti base per comporre le proposizioni. Inoltre, i connettivi che possiamo usare per comporre le proposizioni sono: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$. Formalmente, ogni proposizione in $\mathcal{F}$ è generata induttivamente dalle regole:

$$\perp, \top \in \mathcal{F} \qquad\qquad P, Q, R, \ldots \in \mathcal{F}$$

$$\frac{A \in \mathcal{F} \quad B \in \mathcal{F}}{A \wedge B \in \mathcal{F}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F} \quad B \in \mathcal{F}}{A \vee B \in \mathcal{F}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F} \quad B \in \mathcal{F}}{A \rightarrow B \in \mathcal{F}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}}{\neg A \in \mathcal{F}}$$

Questa definizione permette di fare dimostrazioni per induzione sulla struttura delle proposizioni, ovvero sul modo in cui sono state create sintatticamente. Indicheremo con *Atm* l'insieme delle proposizioni atomiche. Ovviamente $Atm \subseteq \mathcal{F}$.

Ricordiamo la definizione della valutazione classica.

**Definizione 1** (Modello classico)**.** *Un modello classico è definito da una valutazione atomica*

$$\begin{aligned} v_{Atm} : \quad & Atm \longrightarrow \{0, 1\} \\ & P \longmapsto v_{Atm}(P) \end{aligned} \tag{1}$$

*che è estesa a*

$$\begin{aligned} v : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\} \\ & A \longmapsto v(A) \end{aligned} \tag{2}$$

*per induzione sulla struttura delle formule ben formate come segue:*

$$\begin{array}{rcl} v(P) & = & v_{Atm}(P) \quad \textit{per ogni } P \in Atm \\ v(\top) & = & 1 \\ v(\perp) & = & 0 \\ v(A \wedge B) & = & min\,(\,v(A),\ v(B)\,) \\ v(A \vee B) & = & max\,(\,v(A),\ v(B)\,) \\ v(A \rightarrow B) & = & 1 \quad \textit{se e solo se} \quad v(A) \leq v(B) \end{array}$$

**Modelli per il calcolo LK.** Partiamo dai modelli del calcolo dei sequenti classico. Essi sono determinati da una funzione di valutazione

$$v : \mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\}$$

che associa ogni formula ben formata ad un *valore di verità*. Per comodità definiamo un ordine nell'insieme $\{0, 1\}$ e poniamo $0 \leq 1$. Intuitivamente diciamo che

- $v(A) = 0$ significa che la proposizione $A$ è *falsa* nel mondo rappresentato da $v$;
- $v(A) = 1$ significa che la proposizione $A$ è *vera* nel mondo rappresentato da $v$.

Ogni mondo (o valutazione, o interpretazione) è scorrelato dagli altri. Intuitivamente possiamo pensare che quando un individuo sposa una valutazione esso si trova già tutto definito: ogni proposizione ha gà fissato il suo valore di verità.

**Modelli per il calcolo LJ.** I modelli più semplici per il calcolo intuizionista si ottengono prendendo i mondi della logica classica e mettendoli in relazione/correlazione tra loro. I modelli classici diventano nodi di una struttura ad albero. Tale struttura ad albero rappresenta il nostro modo di apprendere *'in positivo'*: man mano che procediamo nel ragionamento aumentiamo le informazioni positive che noi possediamo. L'approccio intuizionista è sostanzialmente diverso dall'approccio classico in quanto non assume che ogni proposizione abbia già un valore di verità preassegnato, ma diventa 'vera' (diremo più correttamente *dimostrabile*) o 'falsa' (diremo più correttamente *non dimostrabile*) quando otteniamo effettivamente una prova (o *dimostrazione*) della sua correttezza o della sua non correttezza.

Un modello ad albero rappresenta il modo di procedere della nostra conoscenza:

- la *radice* rappresenta il punto di partenza, lo stadio iniziale del ragionamento;
- i *nodi* rappresentano gli stadi della conoscenza;
- i *cammini* rappresentano le varie possibilità che abbiamo di procedere nel ragionamento.

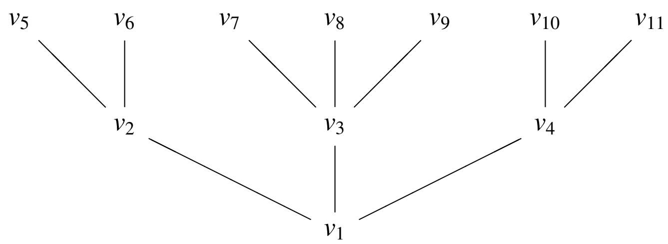
Un albero rappresenta il modo di procedere della nostra conoscenza. La *radice* rappresenta il punto di partenza: lo stadio iniziale del ragionamento. I vari *cammini* rappresentano le varie possibilità nel procedere nel ragionamento. I *nodi* rappresentano gli stadi della conoscenza.

La struttura dell'albero definisce una *gerarchia* tra gli stadi di conoscenza. Due stadi di conoscenza $v$ e $w$ sono *comparabili* se sono su di uno stesso cammino che parte dallo stadio di conoscenza iniziale (la radice), il *'primo'* dei due è quello che si trova più vicino alla radice, in pratica quello che viene prima nel processo di conoscenza.

**Definizione 2.** *Dati due nodi $v$ e $w$ di un albero, diciamo che $v$ è uno stadio* precedente *a $w$, o anche che $w$ è uno stadio successivo a $v$ e scriviamo $w \rhd v$, se $v$ viene incontrato prima di $w$ in un cammino dalla radice a $w$. Ammettiamo anche che per ogni nodo $v$ sia $v \rhd v$.*

Quindi dire che $w \rhd v$ significa che $v$ viene raggiunto prima di $w$ nel processo di conoscenza. Notiamo che la relazione $\rhd$ risulta riflessiva e transitiva.

**Esempio 3.**




In questo caso $v_1$ è precedente ad ogni nodo. Inoltre $v_5 \rhd v_2 \rhd v_1$, $v_7 \rhd v_3$, $v_8 \rhd v_3$, $v_9 \rhd v_3$, mentre $v_2$ ed $v_4$ non sono comparabili.

**Valutazione.** Ogni nodo $v$ è visto come un mondo in cui si può ragionare *'localmente'* in maniera classica, senza dimenticare però le relazioni con gli altri mondi. Ogni nodo può quindi essere rappresentato ancora da una valutazione

$$v : \mathcal{F} \longmapsto \{0, 1\}$$

che associa ogni formula ben formata ad un *concetto di validità locale*. In particolare:

- $v(A) = 1$ dice che nello stadio di conoscenza rappresentato da $v$ abbiamo una prova che dimostra $A$, in sintesi *'A è dimostrata/provata/valida in v'*;
- $v(A) = 0$ dice che nello stadio di conoscenza rappresentato da $v$ *non* abbiamo una prova che dimostra $A$, in sintesi *'A non è dimostrata/provata/valida in v'*.

Dal momento che il modello rispecchia il progredire della nostra conoscenza in modo 'positivo:' una volta scoperto che vale una proposizione, essa non verrà più confutata. Questo vuol dire che se una proposizione primitiva è verificata in uno stadio della conoscenza, allora lo sarà in ogni stadio successivo. Pensiamo alle prove. Se $v(A) = 1$, ciò significa che in $v$ abbiamo una prova di $A$, inoltre nel processo di conoscenza la prova di $A$ è ormai acquisita e quindi per ogni $w \rhd v$ dobbiamo dire che $w(A) = 1$. D'altro canto, anche se $v(A) = 0$, ovvero in $v$ non abbiamo ancora ottenuto una prova di $A$, è ammissibile che prendendo $w \rhd v$ sia $w(A) = 1$, ovvero che ad un certo punto del processo di conoscenza riusciamo finalmente a provare $A$. In sintesi, presi $w \rhd v$:

- se $v(A) = 1$ allora $w(A) = 1$ (in prosa: 'se ho una prova di $A$ allora continuo ad avere la prova di $A$');
- è ammissibile che $v(A) = 0$ e $w(A) = 1$ (in prosa: 'non ho una prova di $A$, ma nel processo di conoscenza riesco a costruire la prova di $A$')

Nel modello questo si traduce chiedendo la *monotonia di Kripke*

$$\text{se } w \rhd v \text{ allora } w(A) \geq v(A) \text{ per ogni } A \in \mathcal{F} \tag{3}$$

dove consideriamo l'ordine usuale nel reticolo $\{0, 1\}$, definito da $0 \leq 1$.

Le costanti logiche e le proposizioni atomiche (del tipo "esco," "piove," "c'è il sole," "prendo l'ombrello," "prendo il cappello") rappresentano le informazioni di base che abbiamo in uno stadio di conoscenza. Su di esse (e solo su di esse!) possiamo prendere posizione. Dobbiamo sapere quali di esse valgono in uno stadio di conoscenza. Dobbiamo quindi definire la valutazione atomica su ogni nodo. Fissato un albero $T$, per ogni nodo $v$ dell'albero definiamo la *valutazione atomica* in $v$:

$$\begin{aligned} v_{Atm} : \quad & Atm \longrightarrow \{0, 1\} \\ & P \longmapsto v_{Atm}(P) \end{aligned} \tag{4}$$

Tale valutazione atomica deve soddisfare (3), la monotonia di Kripke, e quindi deve essere definita in modo che

$$\text{se } w \rhd v \text{ allora } w_{Atm}(P) \geq v_{Atm}(P) \text{ per ogni } P \in Atm \tag{5}$$

La valutazione atomica $v_{Atm}$ viene assunta a priori e da essa si definisce le valutazione $v$ di tutte le proposizioni che di possono scrivere nel linguaggio della logica, combinando con i vari connettivi. La valutazione $v$ viene definita per induzione sulla struttura delle proposizioni. Vediamolo formalmente.

**Definizione 4** (Modello di Kripke)**.** *Un modello di Kripke è un albero $T$ tale che in ogni suo nodo è definita una valutazione atomica*

$$\begin{aligned} v_{Atm} : \quad & Atm \longrightarrow \{0, 1\} \\ & P \longmapsto v_{Atm}(P) \end{aligned} \tag{6}$$

*che soddisfa alla monotonia:*

$$\textit{se } w \rhd v \textit{ allora } w_{Atm}(P) \geq v_{Atm}(P) \textit{ per ogni } P \in Atm \tag{7}$$

*Tale valutazione $v_{Atm}$ è estesa a*

$$\begin{aligned} v : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \{0, 1\} \\ & A \longmapsto v(A) \end{aligned} \tag{8}$$

*per induzione sulla struttura delle formule ben formate come segue:*

$$\begin{array}{rcl} v(P) & = & v_{Atm}(P) \quad \textit{per ogni } P \in Atm \\ v(\top) & = & 1 \\ v(\bot) & = & 0 \\ v(A \wedge B) & = & min\,(\,v(A),\ v(B)\,) \\ v(A \vee B) & = & max\,(\,v(A),\ v(B)\,) \\ v(A \to B) & = & 1 \quad \textit{se e solo se} \quad w(A) \leq w(B) \textit{ per ogni } w \rhd v \end{array}$$

La valutazione segue le linee della valutazione classica. Anzi, coincide con la valutazione classica per tutti i connettivi tranne l'implicazione. Per sapere se abbiamo una prova di $A \wedge B$ ci basta avere una prova di $A$ *e* una prova di $B$. Per sapere se abbiamo una prova di $A \vee B$ si basta avere una prova di $A$ *o* una prova di $B$. Basta ragionare classicamente sulle prove: una prova c'è o non c'è!

Per la valutazione dell'implicazione il discorso è diverso. Questo connettivo introduce una certa dinamicità nel ragionamento. Non può considerare solo lo stato attuale, ma si deve confrontare pure con gli sviluppi futuri. Per dire che $A \to B$ è valida in uno stadio di conoscenza, dobbiamo sapere che: in ogni stadio successivo, qualora sapessi che $A$ è valida, allora lo deve essere anche $B$. In pratica, avere una prova di $A \to B$ significa avere un *algoritmo* che appena riceve in input una prova di $A$, subito produce una prova di $B$. Non possiamo più dire 'se $A$ è valutata a 0 allora banalmente vale $A \to B$'. Dobbiamo essere sicuri che appena $A$ viene valutata a 1 (ovvero dimostriamo $A$) allora anche $B$ viene subito valutata a 1 (ovvero la prova di $A$ può essere estesa in una prova di $B$). Quando proviamo $A \to B$ dobbiamo fornire un metodo: quello che ci fa passare da una prova di $A$ ad una prova di $B$.

La valutazione dell'implicazione si rifletta anche sulla valutazione della negazione. Infatti, abbiamo definito $\neg A$ come $A \to \bot$, quindi otteniamo:

$$\begin{array}{lll} v(\neg A) = 1 & \text{se e solo se} & v(A \to \bot) = 1 \\ & \text{se e solo se} & w(A) \leq w(\bot) \text{ per ogni } w \rhd v \\ & \text{se e solo se} & w(A) \leq 0 \text{ per ogni } w \rhd v \\ & \text{se e solo se} & w(A) = 0 \text{ per ogni } w \rhd v \end{array}$$

Abbiamo derivato la valutazione della negazione

$$v(\neg A) = 1 \text{ se e solo se } w(A) = 0 \text{ per ogni } w \rhd v \tag{9}$$

che ci da un metodo per verificare quando $\neg A$ è valida in un determinato stadio di conoscenza.

La valutazione della negazione rilegge in chiave di 'non validità' la monotonia di Kripke, definita in positivo per parlare di 'validità'. Possiamo infatti schematizzare i due concetti:

- la monotonia di Kripke dice: "se sappiamo che $A$ vale in un determinato stadio, allora $A$ sarà valida in ogni stadio successivo;"
- la valutazione della negazione dice: "se sappiamo che $\neg A$ vale in un determinato stadio, allora $A$ non sarà mai verificata in uno stadio successivo di conoscenza.

Da sottolineare inoltre il fatto che ci possono essere stadi un cui non sappiamo se una proposizione sia valida o lo sia la sua negazione, ovvero stadi in cui $A = 0$ e $\neg A = 0$ (vedi Esercizio 14).

La Definizione 4 è formulata in modo tale da estendere anche sulle formule composte la proprietà di monotonia già richiesta per la valutazione delle formule atomiche. In questo modo la definizione rende positivo il processo di conoscenza su tutte le proposizioni: se ad uno stadio di conoscenza si sanno valide certe proposizioni, allora queste rimarranno valide in tutti gli stadi successivi. Questa affermazione si formalizza nel seguente lemma.

**Lemma 5** (Monotonia)**.** *In un modello di Kripke $T$ vale la seguente proprietà: per ogni $v, w \in T$ se $w \triangleright v$ allora $w(A) \geq v(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.*

*Dimostrazione.* Sia $w \triangleright v$, proviamo che $w(A) \geq v(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ induzione sulla struttura delle formule.

*Caso base.* Dobbiamo dimostrare che il Lemma vale per proposizioni atomiche, $\perp$ e $\top$. Sulle proposizioni atomiche $v(\,)$ e $w(\,)$ coincidono con $v_{Atm}()$ e $w_{Atm}$, quindi i lemma è verificato grazie alla proprietà (7). Per $\perp$ e $\top$ il lemma è verificato grazie alla Definizione 4, dal momento che $w(\perp) = 0 = v(\perp)$ e $w(\top) = 1 = v(\top)$.

*Passo induttivo.* Dobbiamo considerare i connettivi, che ci permettono di costruire tutte le formule partendo dalle formule atomiche. I casi da discutere sono tre.

($\wedge$) Consideriamo la proposizione $A \wedge B$ e assumiamo, per ipotesi induttiva, che il lemma valga per le sue sotto-proposizioni. In particolare l'ipotesi induttiva ci dice che il lemma vale per $A$ e $B$, ovvero:

a. $w(A) \geq v(A)$;

b. $w(B) \geq v(B)$.

Sfruttando queste due ipotesi dobbiamo provare che il lemma è verificato per $A \wedge B$, ovvero

c. $w(A \wedge B) \geq v(A \wedge B)$.

Per definizione abbiamo $v(A) \geq \min(v(A),\ v(B))$ e quindi, grazie al punto a. otteniamo

$$w(A) \geq \min(v(A),\ v(B)).$$

Ancora per definizione abbiamo $v(B) \geq \min(v(A),\ v(B))$ e quindi, grazie al punto b. otteniamo

$$w(B) \geq \min(v(A),\ v(B)).$$

Le due disuguaglianze ci dicono che

$$\min(w(A),\ w(B)) \geq \min(v(A),\ v(B))$$

e quindi $w(A \wedge B) \geq v(A \wedge B)$ come cercato.

($\vee$) Consideriamo la proposizione $A \vee B$ e assumiamo, per ipotesi induttiva, che il lemma valga per le sue sotto-proposizioni. In particolare l'ipotesi induttiva ci dice che il lemma vale per $A$ e $B$, ovvero:

a. $w(A) \geq v(A)$;

b. $w(B) \geq v(B)$.

Sfruttando queste due ipotesi dobbiamo provare che il lemma è verificato per $A \vee B$, ovvero

c. $w(A \vee B) \geq v(A \vee B)$.

Per definizione abbiamo $\max(w(A),\ w(B)) \geq w(A)$ e quindi, grazie al punto a. otteniamo

$$\max(w(A),\ w(B)) \geq v(A).$$

Ancora per definizione abbiamo $\max(w(A),\ w(B)) \geq w(B)$ e quindi, grazie al punto b. otteniamo

$$\max(w(A),\ w(B)) \geq v(B).$$

Le due disuguaglianze ci dicono che

$$\max(w(A),\ w(B)) \geq \max(v(A),\ v(B))$$

e quindi $w(A \vee B) \geq v(A \vee B)$ come cercato.

($\to$) Consideriamo infine la proposizione $A \to B$. In questo caso, possiamo dimostrare il lemma anche senza sfruttare le ipotesi induttive. Distinguiamo due casi.

- Se $v(A \to B) = 0$ allora $w(A \to B) \geq v(A \to B)$ è immediato.
- Se $v(A \to B) = 1$ la Definizione 4 dice che $v'(A) \leq v'(B)$ per ogni $v' \rhd v$. Ora, per ogni $w' \rhd w$ si ha anche $w' \rhd v$ (per transitività) e quindi $w'(A) \leq w'(B)$ che significa appunto $w(A \to B) = 1$. Concludiamo anche in questo caso $w(A \to B) \geq v(A \to B)$. □

Una semplice conseguenza della monotonia che sarà utile negli esercizi è la seguente.

**Lemma 6.** *Dato $T$ modello di Kripke, per ogni $v \in T$ e $A \in \mathcal{F}$ valgono le seguenti implicazioni:*

1. *Se $v(A) = 1$ allora $w(A) = 1$ per ogni $w \in T$ con $w \rhd v$.*
2. *Se $v(A) = 0$ allora $w(A) = 0$ per ogni $w \in T$ con $v \rhd w$.*

*Dimostrazione.* Il punto 1 è la monotonia. Il punto 2 deriva dal fatto che se fosse $w(A) = 1$ per qualche $w \in T$ con $v \rhd w$ allora dovrebbe essere $v(A) = 1$ per monotonia. □

Le definizioni di forcing ($\vDash$), o conseguenza semantica, date per la semantica di LK si possono estendere ai modelli di Krikpe per il calcolo LJ intuizionistico.

Partiamo dalle formule.

**Definizione 7** (Concetto di validità per formule)**.** *Sia $A \in \mathcal{F}$.*

- *Dato $T$ modello di Kripke e $v \in T$, si dice che $A$ è valida in $v$, e si scrive $v \vDash A$, se e solo se $v(A) = 1$.*
- *Dato $T$ modello di Krikpe, si dice che $A$ è valida in $T$, e si scrive $T \vDash A$, se e solo se $v \vDash A$ per ogni $v \in T$.*
- *Si dice che $A$ è valida, e si scrive $\vDash A$, se e solo se $T \vDash A$ per ogni modello di Kripke $T$.*

In questi termini, possiamo fare un confronto con la valutazione, o verità, classica (quella data dalle regole di LK). La verità classica è *statica:* c'è un solo stadio di conoscenza, quello di "come stanno le cose", ovvero la conoscenza di un essere onnisciente. La verità intuizionistica (quella data dalle regole di LJ) è *dinamica:* ci sono vari stadi di conoscenza. Con una unica, ma importantissima condizione: se da uno stadio $v$ si passa ad un successivo stadio $w$, e se allo stadio $v$ la proposizione $A$ è vera (oppure: $A$ è valida allo stadio $v$), allora $A$ è vera (valida) anche allo stadio $w$. Abbiamo chiamato questa condizione: monotonia, o stabilità.

In un certo senso, se il classico si considera onnisciente, l'intuizionista è molto conservatore, perché vuole credere in $A$ oggi (stadio $v$) solo se già conosce che sia oggi, sia domani e sempre (ogni stadio $w$ a cui si arriva a partire da $w$) crederà in $A$. È per questo che ha bisogno di argomentazioni positive, nel senso che non siano modificate da aumento di informazione (come: esistenza di un certo algoritmo, o di una verifica). La mancanza di una certa informazione (tipicamente: il fatto che in $w$ non si possa dimostrare $A$) non può quindi essere considerata una buona argomentazione, perché ogni mancanza di informazioni può essere colmata in uno stadio di conoscenza successivo, e quindi contraddire la monotonia.

Per definire la validità di un sequente dobbiamo prima estendere la valutazione a insiemi di formule.

**Definizione 8** (Valutazione di insiemi di formule)**.** *Sia $T$ modello di Kripke e $v \in T$. Preso $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ poniamo $v(\Gamma) = min_{A\in\Gamma}(\, v(A)\,)$. In particolare $v(\emptyset) = 1$.*

Ed ecco infine la nozione di validità per i sequenti.

**Definizione 9** (Validità di sequenti)**.** *Sia $\Gamma \vdash A$ un sequente.*

- *Dato $T$ modello di Kripke e $v \in T$, si dice che $\Gamma \vdash A$ è valido in $v$, e si scrive $\Gamma \vDash_v A$, se e solo se $v(\Gamma) \leq v(A)$.*
- *Dato $T$ modello di Krikpe, si dice che $\Gamma \vdash A$ è valido in $T$, e si scrive $\Gamma \vDash_T A$, se e solo se $\Gamma \vDash_v A$ per ogni $v \in T$.*
- *Si dice che $\Gamma \vdash A$ è valido in $T$, e si scrive $\Gamma \vDash A$, se e solo se $\Gamma \vDash_T A$ per ogni modello di Kripke $T$.*

Per tale semantica si possono verificare (*Esercizio!*) le seguenti proprietà, che per fare un parallelo con il caso classico continuiamo a chiamare con nomenclatura classica.

**Contrazione Semantica.** Se $\Gamma, A \vDash_v B$ con $v(A) = 1$, allora $\Gamma \vDash_v B$.

**Indebolimento Semantico.** Se $\Gamma \vDash_v A$ allora $\Gamma, \Gamma' \vDash_v A$ per ogni $\Gamma' \subseteq \mathcal{F}$.

**Verità Semantica.** Se $v(a) = 1$ allora $\Gamma \vDash_v A$ per ogni $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$.

**Falsità Semantica.** Se $v(A) = 0$ allora $\Gamma, A \vDash_v B$ per ogni $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}$.

Queste proprietà sono utili per provare il Teorema di validità, la cui dimostrazione segue le linee del corrispondente classico. I punti che richiedono particolari attenzione sono le regole per l'implicazione. I seguenti lemmi le studiano in dettaglio. Vediamo prima implica formazione.

**Lemma 10** (Validità di $\to f$ ). *Se* $\Gamma, A \vDash_T B$ *allora* $\Gamma \vdash_T A \to B$.

*Dimostrazione.* Sia $T$ un modello di Kripke. L'ipotesi dice che $\Gamma, A \vDash_T B$ e questo significa che

$$\Gamma, A \vDash_v B \quad \text{per ogni } v \in T \tag{10}$$

Prendiamo ora $v \in T$ e distinguiamo due casi

- Se $v(\Gamma) = 0$ allora $\Gamma \vDash_v A \to B$ per falsità semantica.
- Se $v(\Gamma) = 1$ consideriamo $w \rhd v$. Le ipotesi in (10) dicono che $\Gamma, A \vDash_w B$ ovvero $w(\Gamma, A) \le w(B)$. Il fatto che $v(\Gamma) = 1$ e la monotonia di Kripke ci dicono che $w(\Gamma) = 1$. Consideriamo allora due casi.
  - Se $w(A) = 0$ allora subito $w(A) \le w(B)$.
  - Se $w(A) = 1$ allora $w(\Gamma, A) = 1$. Il fatto che $w(\Gamma, A) \le w(B)$ ci dice che anche $w(B) = 1$. Quindi, anche in questo caso, otteniamo $w(A) \le w(B)$.

  In ogni caso se $w \rhd v$ otteniamo $w(A) \le w(B)$. Vista la genericità di $w$ concludiamo che $v(A \to B) = 1$ e quindi ancora $\Gamma \vDash_T A \to B$.

Vista la genericità di $v$ concludiamo $\Gamma \vDash_T A \to B$. □

A seguire implica riflessione esplicita.

**Lemma 11** (Validità di $\to r$ ). *Se* $\Gamma \vDash_T A$ *e* $\Gamma, B \vDash_T C$ *allora* $\Gamma, A \to B \vdash_T C$.

*Dimostrazione.* Sia $T$ modello di Kripke. L'ipotesi dice che $\Gamma \vDash_T A$ e $\Gamma, B \vDash_T C$, ovvero che

$$\Gamma \vDash_v A \text{ e } \Gamma, B \vDash_v C \quad \text{per ogni } v \in T \tag{11}$$

Prendiamo ora $v \in T$ e distinguiamo due casi

- Se $v(\Gamma) = 0$ allora $\Gamma, A \to B \vDash_v C$ per falsità semantica.
- Se $v(\Gamma) = 1$ consideriamo $w \rhd v$. Consideriamo ancora due sotto-casi.
  - Se $v(A \to B) = 0$ allora $\Gamma, A \to B \vDash_v C$ ancora per falsità semantica.
  - Se $v(A \to B) = 1$ allora per ogni $w \rhd v$ vale $w(A) \le w(B)$. In particolare $v \rhd v$ e quindi $v(A) \le v(B)$. Le ipotesi $\Gamma \vDash_v A$ e il caso $v(\Gamma) = 1$ ci dicono che $v(A) = 1$. Poiché $v(A) \le v(B)$ otteniamo $v(B) = 1$. Quindi $v(\Gamma, B) = 1$. L'ipotesi $\Gamma, B \vDash_v C$ ci dice allora che anche $v(C) = 1$. Concludiamo che $v(\Gamma, A \to B) \le v(C)$, ovvero $\Gamma, A \to B \vDash_v C$.

In ogni caso $\Gamma, A \to B \vDash_v C$. Quindi $\Gamma, A \to B \vDash_T C$ vista la genericità di $v$. □

I due precedenti lemmi sono i punti salienti del seguente teorema di validità: quello che lega le derivazioni che possiamo fare nel calcolo LJ e la semantica che abbiamo appena definito. La prova del teorema si può fare per induzione sull'altezza della derivazione, come già fatto a lezione per il caso classico. Si tratta di mostrare che le regole di LJ preservano la validità cosìcome è definita nei modelli di Kripke. Lasciamo prova come esercizio.

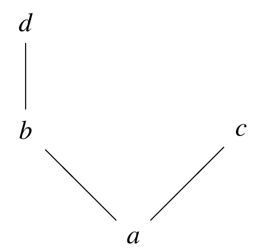
**Teorema 12** (Validità)**.** *Ogni sequente derivabile in LJ è valido.*

Si può anche provare (ma con maggior fatica!) che il precedente teorema può essere invertito. Si può quindi ottenere il seguente

**Teorema 13** (Completezza)**.** *Ogni sequente valido è derivabile in LJ.*

Come nel caso classico il teorema di validità può essere usato per costruire un *contromodello*: se si definisce un modello di Kripke in cui un sequente non è valido allora si è provato che tale sequente non è derivabile in LJ. Infatti il teorema di Validità dice che un sequente derivabile in LJ *deve* essere valido in *ogni* modello di Kripke. Appena troviamo un modello in cui le cose non funzionano allora possiamo concludere la non derivabilità del sequente.

Vediamo ora qualche esempio, considerando l'albero $T$:




**Esercizio 14.** *Provare che* $\vdash P \vee \neg P$ *non è valido in* $T$ *se*

$$\begin{array}{rcl} a_{Atm}(P) & = & 0 \\ b_{Atm}(P) & = & 1 \\ c_{Atm}(P) & = & 0 \\ d_{Atm}(P) & = & 1 \end{array}$$

*Svolgimento.* Per provare che $\vdash P \vee \neg P$ non è valido in $T$ dobbiamo trovare un nodo $v \in T$ per cui non vale $\vdash P \vee \neg P$, ovvero $v(P \vee \neg P) = 0$. Visto che $v(P \vee \neg P)$ è definita induttivamente sulla struttura della formula, procediamo per passi sulle sotto-formule di $P \vee \neg P$. La sottoformula $P$ è già determinata dalla valutazione atomica nei vari nodi. Passiamo alla sottoformula $\neg P$. La semantica della negazione è derivata da quella dell'implicazione: per verificare che $\neg P$ vale in un nodo $v$ dobbiamo verificare che $w(P) = 0$ in ogni stadio $w$ successivo al nodo $v$ considerato. In questo caso fissiamo l'attenzione sul nodo $a$, abbiamo $b \rhd a$ e $b(P) = 1$ quindi non sono verificate le condizioni per dire $a(\neg P) = 1$ e possiamo concludere $a(\neg P) = 0$. Ora passiamo alla formula $P \vee \neg P$ e vediamo se è valida nel nodo $a$. Ricordiamo che $a(P) = 0$ e $a(\neg P) = 0$, quindi $a(P \vee \neg P) = max(a(P), a(\neg P))$. Questo significa che $P \vee \neg P$ non è valido in $T$.

**Osservazione 15.** Il precedente esercizio mostra che per affermare che $\neg P$ vale in uno stadio di conoscenza, dobbiamo essere sicuri che $P$ non potrà mai essere valida in nessuno stadio di conoscenza successivo (superiore nell'ordine dell'albero). La monotonia della valutazione (Lemma 5) testimonia appunto la 'positività' delle informazioni che otteniamo: una volte raggiunte non potranno più essere confutate. Potremmo dire che nello stadio $a$ dell'esercizio precedente la nostra conoscenza di $P$ è in un certo modo 'incerta' e non abbiamo abbastanza informazioni per capire se sia valida $P$ o $\neg P$. Quando arriviamo allo stadio di conoscenza $b$ acquistiamo maggiori informazioni e sappiamo che $P$ è valida.

**Osservazione 16.** Grazie alla monotonia di Kripke, per verificare se una formula $A$ è valida in un modello di Kripke $T$ basta verificare la sua validità sulla radice $r$ dell'albero. Infatti se $r(A) = 0$ abbiamo provato che $A$ non è valida in $T$, mentre se $r(A) = 1$ la monotonia ci dice che $v(a) = 1$ per ogni $v \rhd r$, ovvero per ogni $v \in T$.

**Esercizio 17.** *Provare che* $\vdash P \vee \neg P$ *è valido in* $T$ *se*

$$\begin{array}{rcl} a_{Atm}(P) & = & 0 \\ b_{Atm}(P) & = & 0 \\ c_{Atm}(P) & = & 0 \\ d_{Atm}(P) & = & 0 \end{array}$$

*Svolgimento.* Consideriamo la radice $a$ dell'albero. La validità della sottoformula $P$ è già data dalla valutazione atomica, che è definita su tutti i nodi dell'albero. Vediamo $\neg P$. Abbiamo $a(\neg P) = 1$ se e solo se $v(P) = 0$ per ogni $v \rhd a$, ovvero per ogni $v \in T$. Stavolta la richiesta è verificata, quindi $a(\neg P) = 1$. Da qui è facile concludere che $a(P \vee \neg P) = 1$ secondo la definizione. Abbiamo provato che $P \vee \neg P$ è valido in $T$ secondo questa nuova valutazione atomica.

**Osservazione 18** (Valutazione della implicazione)**.** La valutazione di una implicazione in un nodo coinvolge tutti i nodi che lo seguono nell'albero in un cammino dalla radice alle foglie. La definizione dice che $v(A \to B) = 1$ se e solo se $w(A) \leq w(B)$ per ogni $w \rhd v$. Fissiamo un nodo $v$ e consideriamo tutti i nodi $w \rhd v$ che sono immediatamente connessi a $v$ con un arco (per esempio nell'albero $T$ prendendo il nodo $a$, i nodi a lui connessi con un arco sono $b$ e $c$). In questa situazione, *se e solo se* proviamo che $v(A) \leq v(B)$ (nel caso dell'esempio: $a(A) \leq a(B)0$) e che $w(A \to B) = 1$ per tutti i particolari nodi $w$ considerati (nel caso dell'esempio $b(A \to B) = 1$ e $b(A \to B) = 1$) possiamo concludere che $v(A \to B) = 1$. Esprimiamo meglio il concetto con un lemma.

**Lemma 19.** *Sia* $T$ *modello di Kripke e* $v \in T$. *Vale* $v(A \to B) = 1$ *se e solo se* $v(A) \leq v(B)$ *e* $w(A \to B) = 1$ *per ogni* $w \rhd v$ *che è immediatamente connesso a* $v$ *con un arco.*

*Dimostrazione.* Esercizio □

Per verificare l'implicazione in un nodo conviene verificarla prima sui suoi adiacenti e, nel caso questa sia verificata su tutti, basa ragionare 'classicamente' sul nodo stesso (ovvero verificare una relazione d'ordine) ed il gioco è fatto. Conviene sempre partire dalle foglie (se ci sono!) visto che non hanno stadi successivi. Vedremo l'idea nel seguente esercizio, ma prima specializziamo il lemma precedente alla negazione.

**Lemma 20.** *Sia* $T$ *modello di Kripke e* $v \in T$. *Vale* $v(\neg A) = 1$ *se e solo se* $v(A) = 0$ *e* $w(\neg A) = 1$ *per ogni* $w \rhd v$ *che è immediatamente connesso a* $v$ *con un arco.*

*Dimostrazione.* Immediata conseguenza del lemma precedente ricordando che $\neg A$ è definito come $a \rightarrow \perp$ e che la valutazione di $\perp$ è sempre 0. $\square$

**Esercizio 21.** *Provare che* $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ *non è valido in* $T$ *se*

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
a_{Atm}(P) & = & 0 & a_{Atm}(Q) & = & 0 \\
b_{Atm}(P) & = & 1 & b_{Atm}(Q) & = & 0 \\
c_{Atm}(P) & = & 0 & c_{Atm}(Q) & = & 1 \\
d_{Atm}(P) & = & 1 & d_{Atm}(Q) & = & 0
\end{array}$$

*Definire una nuova valutazione* $V_{Atm}(\,)$ *in modo che il sequente sia valido in* $T$.

*Svolgimento.* Per provare che $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ non è valido in $T$ dobbiamo trovare un nodo $v \in T$ per cui non vale $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$, ovvero $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$. Visto che $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ è definita induttivamente sulla struttura della formula, procediamo per passi sulle sotto-formule di $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$. Le sottoformule $P$ e $Q$ sono già determinate dalla valutazione atomica nei vari nodi. Passiamo alle implicazioni. Vediamo $P \rightarrow Q$. Partiamo dalle foglie e scendiamo alla radice.

- $d(P) \nleq d(Q)$ quindi $d(P \rightarrow Q) = 0$.
- $d(Q) \leq d(P)$ quindi $d(Q \rightarrow P) = 1$.
- $c(P) \leq c(Q)$ quindi $c(P \rightarrow Q) = 1$.
- $c(Q) \nleq c(P)$ quindi $c(Q \rightarrow P) = 0$.
- poiché $d \rhd b$ e $d(P \rightarrow Q) = 0$ allora anche $b(P \rightarrow Q) = 0$.
- $d(Q \rightarrow P) = 1$ e $b(Q) \leq b(P)$ quindi $b(Q \rightarrow P) = 1$.
- poiché $b \rhd a$ e $b(P \rightarrow Q) = 0$ allora anche $a(P \rightarrow Q) = 0$.
- poiché $c \rhd a$ e $c(Q \rightarrow P) = 0$ allora anche $a(Q \rightarrow P) = 0$.

Ora possiamo concludere che

$$a(\,(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)\,) = max\,(\,a(P \rightarrow Q),\, a(Q \rightarrow P)\,) = 0$$

e quindi $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ non è valido in $T$ e di conseguenza non può essere derivato in LJ.

Per la seconda parte dell'esercizio, una buona valutazione atomica potrebbe essere:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
a_{Atm}(P) & = & 0 & a_{Atm}(Q) & = & 0 \\
b_{Atm}(P) & = & 1 & b_{Atm}(Q) & = & 0 \\
c_{Atm}(P) & = & 0 & c_{Atm}(Q) & = & 0 \\
d_{Atm}(P) & = & 1 & d_{Atm}(Q) & = & 1
\end{array}$$

Provate che con questa valutazione atomica il sequente $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$ risulta valido in $T$.

**Esercizio 22.** *Considerate le proposizioni atomiche $P, Q$. Definite una valutazione atomica in $T$ in modo che la proposizione $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$ sia valida in $T$. Definite poi una valutazione atomica in modo che lo stesso sequente non sia valido in $T$ (se non ci riuscite ci sarà un motivo...)*

**Esercizio 23.** *Considerate il seguente modello di Kripke:*

$$\begin{array}{c} b \\ | \\ a \end{array}$$

*E la formula $A$ tale che $a_{Atm}(A) = 0$ e $b_{Atm}(A) = 1$. Verificate che il sequente*

$$\vdash \neg\neg A \to A$$

*non è valido in questo modello.*

*Svolgimento.* Per provare che $\vdash \neg\neg A \to A$ non è valido nel modello, mostriamo che $\vdash \neg\neg A \to A$ non è valido nella radice $a$. Procediamo ancora sulla struttura della formula. La sottoformula $A$ è già determinata dalla valutazione atomica che abbiamo definito. Vediamo le altre partendo dalla foglia $b$ e scendendo alla radice $a$.

- $b(A) \neq 0$ quindi $b(\neg A) = 0$.
- $b(\neg A) = 0$ quindi $b(\neg\neg A) = 1$.
- $b(\neg\neg A) \leq b(A)$ quindi $b(\neg\neg A \to A) = 1$.
- poiché $b \rhd a$ e $b(\neg A) = 0$ allora anche $a(\neg A) = 0$.
- $b(\neg\neg A) = 1$ e $a(\neg A) = 0$ quindi $a(\neg\neg A) = 1$.
- $a(\neg\neg A) \nleq a(A)$ quindi $a(\neg\neg A \to A) = 0$ e abbiamo concluso.