Calcolo dei Sequenti Predicativo: Note ed Esercizi*

damiano.macedonio@univr.it

17 gennaio 2011

1 Logica predicativa: sintassi

La logica proposizionale è piuttosto limitata. La logica predicativa *estende* quella proposizionale:

- Le formule atomiche sono *raffinate* in modo da poter esprimere concetti più complessi.
- I connettivi sono ancora usati per formare proposizioni composte
- I quantificatori ci permettono di formalizzare dichiarazioni più elaborate: *tutti, esiste, ogni, qualche...*

Più precisamente il calcolo dei predicati estende quello proposizionale con le nozioni aggiuntive di quantificatori, predicati (o relazioni), funzioni, variabili e costanti. Vi rimando al Capitolo 4 del libro di testo per una introduzione di tali concetti. Qui vediamo la loro formalizzazione.

Linguaggio. Il linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine è definito da un alfabeto composto da:

1. Un insieme di simboli di costante $a, b, c, \ldots$ (nella semantica indicheranno gli elementi del dominio).
2. Un insieme infinito *Var* di simboli di variabile $x, y, z, \ldots$. (nella semantica devono essere istanziate con gli elementi del dominio)
3. Un insieme di simboli di funzione $f, g, h, \ldots$ ognuna con la propria *arità* (nella semantica, una funzione di arità n (dove n è un naturale) indica una funzione che prende n elementi del dominio e dà un elemento del dominio).
4. Un insieme di simboli di predicato ognuno con la propria *arità* (nella semantica, un predicato di arità n (dove n è un naturale) indica una relazione tra n elementi del dominio).
5. Le costanti logiche $\top, \bot$.
6. I connettivi $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$.
7. I quantificatori $\forall, \exists$

Si usano ancora le parentesi ( ) come simboli ausiliari, per specificare l'associazione tra connettivi.

*Queste note sono una revisione degli appunti scritti da Claudia Faggian per il corso di Logica Matematica presso l'Università di Padova, a.a.2005/2006.

Termini Nella semantica, un termine rappresenterà un elemento del dominio. L'insieme *Ter* dei termini è definito induttivamente come segue:

1. Le costanti $a, b, c, \ldots$ sono termini.
2. Le variabili $x, y, z, \ldots$ sono termini.
3. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini ed f è un segno di funzione di arità n del linguaggio $\mathcal{L}$, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Formule ben formate. L'insieme delle formule ben formate è definito induttivamente come segue:

1. Le costanti logiche $\top$ e $\perp$ sono formule ben formate;
2. Se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e A è un simbolo di predicato di arità n del linguaggio $\mathcal{L}$, allora $A(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula ben formata.
3. Se P è una formula ben formata, allora anche $\neg P$ è una formula ben formata;
4. Se P e Q sono formule ben formate, allora $P \wedge Q$, $P \vee Q$ e $P \to Q$ sono formule ben formate.
5. Se P è una formula ben formata, allora anche $\forall x P$ e $\exists x P$ è una formula ben formata.

Variabili libere/legate e sostituzioni. Vi rimando al libro di testo per le definizioni formali di variabile libera, variabile legata e sostituzione di una variabile con un termine. Qui vi voglio dare solo un paio di intuizioni e notazioni.

La nozione di *variabile legata* è simile a quella di *dichiarazione locale* di variabile nei linguaggi di programmazione. $\forall x A$ dichiara x come variabile locale dentro ad A, che è lo *scope* di $\forall x$.

Per risparmiare parentesi diciamo che i quantificatori 'legano' più di ogni altro connettivo. Per esempio quando scriviamo $\forall x A \to B$ intendiamo $(\forall x A) \to B$, che è diverso da $\forall x(A \to B)$. Lo scope di $\forall x$ in $(\forall x A) \to B$ è A, mentre lo scope di $\forall x$ in $\forall x(A \to B)$ è $A \to B$. Lo scope di $\forall x$ in $\forall x(A \to B) \to C$ è $A \to B$.

Consideriamo $P = \forall x A(x, y)$. In questo caso x è legata, y è *libera.* Per comodità possiamo scrivere la formula P mettendo in evidenza la variabile y in questo modo P(y). Ora, con la scrittura P(t) intendiamo "sostituisci il termine t al posto di y" in tutte le occorrenze *libere* di y. Seguendo la definizione del libro, quindi, $P(t) = \forall x A(x, y)[^t/_y] = \forall x A(x, c)$. Avremmo potuto anche mettere in evidenza x scrivendo $P(x)$. In tal caso, P(t)=P perché la sostituzione non produce alcune effetto (x non è libera!). Se avessi scritto $P(z)$, ancora $P(t)$ non produce alcun effetto visto che la variabile z non compare in P.

Quindi, quando scrivo $P(x)$ intendo semplicemente focalizzarmi sulle possibili occorrenze della variabile *libera* x in P, attenzione: non è detto che ce ne siamo!

Esercizio 1 *Variabile libera o legata? Consideriamo*

$$P = \exists x(A(y, z) \wedge (\forall y(\neg B(y, x) \vee A(y, z))))$$

1. *Quante occorrenza abbiamo per ciascuna delle variabili?*
2. *Indicare quali occorrenze delle variabili sono libere.*
3. *Ci sono nomi di variabili che appaiono sia libere che legate?*
4. *Qual è lo scope di $\exists x$?*
5. *Scriviamo la formula mettendo in evidenza la variabile y in questo modo $P(y)$. Calcolare A(c).*

Consideriamo ora

$$Q(x) = \exists x A(y, z) \wedge (\forall y(\neg B(y, x) \vee Q(y, z)))$$

1. *Qual è lo scope di $\exists x$?*
2. *Calcolare $Q(d)$.*

2 Logica predicativa: semantica (intuizione)

L'idea è quella di esprimere concetti precisi (proprietà) che si riferiscono a individui (elementi) di un determinato dominio. Quindi dobbiamo inizialmente fissare un dominio D di quantificazione: esso può essere l'insieme delle persone, l'insieme dei programmi televisivi, l'insieme dei giorni della settimana, ... Se A è un simbolo di predicato unario (arità=1) allora semanticamente con $A(x)$ (letto "A di x" o "A applicato a alla variabile x) intenderemo che la proprietà indicata da A vale per la variabile x. Per risparmiare parentesi, quando non ci sarà ambiguità scriveremo semplicemente Ax. Come abbiamo già detto, la scrittura $A(a)$ è una abbreviazione della sostituzione $A[^a/_x]$ e con essa intendiamo che la proprietà indicata da A vale per l'elemento individuato da a. Anche in questo caso possiamo abbreviare con Aa quando non c'è ambiguità. Vediamo a cosa corrispondono le due quantificazioni:

1. $\forall x A(x)$ è una *quantifcazione universale* e dice che la proprietà indicata da A vale per ogni elemento del dominio D.

2. $\exists x A(x)$ è una *quantifcazione esistenziale* e dice che la proprietà indicata da A vale per almeno un elemento del dominio D (esiste un elemento tale che...).

Vediamo i due concetti con un esempio. Consideriamo il dominio delle delle persone e dei corsi dell'università di Verona (lo potete vedere come l'unione del dominio delle persone con il dominio dei corsi). Prendiamo questi predicati:

A(x,y):	x ammira y
B(x,w):	x ama w
C(w):	w è un corso
P(x):	x è un professore
S(x):	x è uno studente
m:	Miriam (una persona)

Formalizziamo le seguenti sentenze:

1. Miriam ammira ogni professore

2. Alcuni professori ammirano Miriam

3. Miriam ammira sè stessa

4. Nessuno studente ama ogni corso

5. Nessun corso è amato da tutti gli studenti

6. Non ci sono corsi amati da nessuno studente

Si tratta di esprimere questi concetti, in un linguaggio che può dire solamente 'tutti', 'esiste', 'non tutti', 'non esiste'.... Notate innanzitutto che:

- In generale, la formalizzazione non è unica (vedi sotto).

- Il predicato $A(x,y)$ esprime una relazione tra individui. Che senso ha $A(m, P(x))$? Semanticamente suonerebbe così: *Miriam ammira "x è professore"*...

1. Il primo passo è capire cosa vogliamo dire: Miriam ammira tutti gli individui che sono professori.

Non va bene: $\forall x(P(x) \wedge A(m,x))$, che dice "per tutti gli individui x, x è professore, e Miriam lo ammira". E gli x che sono studenti, o sono corsi? La formula non corrisponde a quello che volevamo esprimere. Infatti, l'ammirazione di Miriam è selettiva e condizionata.

Bene: $\forall x(P(x) \rightarrow A(m,x))$ Il connettivo $\rightarrow$ *seleziona* tra tutti gli individui del dominio quelli che hanno la proprietà che vogliamo (la qualità per essere ammirati da Miriam.)

2. Qui vogliamo dire che qualcuno ama Miriam $\exists x A(x, m)$, e specificare che quel qualcuno e' un professore. Quindi

Bene: $\exists x(P(x) \wedge A(x, m))$

Non va bene: $\exists x(P(x) \rightarrow A(x, m))$

Attenzione: il problema qui è sottile. Visto che il dominio non comprende solo professori, mi basta prendere lo *studente Rodolfo* r (tale che $\neg P(r)$) e qualunque cosa Rodolfo pensi di Miriam, è vero che $P(r) \rightarrow A(x, m)$ (del tipo "se mia nonna avesse le ruote...").

4–6. Queste sentenze sono complesse. Conviene occuparsi di una variabile alla volta. Proviamo per esempio a quantificare solo sugli studenti, e fissiamo un corso, per esempio il corso di logica l. Vogliamo iniziare formalizzando

"Nessuno studente ama logica"

Non va bene: $\neg\forall x B(x, l)$ che si legge "Non tutti gli individui amano logica" (Considerate per esempio: "Non tutti gli studenti passano l'esame" oppure "Nessuno studente passa l'esame". Quale situazione è più drammatica?)

Bene: $\forall x(S(x) \rightarrow \neg B(x, l))$

Bene: $\neg\exists x(S(x) \wedge B(x, l))$

Due modi di formalizzare la stessa idea?! Quale è la migliore? Entrambe le formalizzazioni sono buone. Come facciamo ad essere sicuri? Come possiamo dire che due specifiche che sembrano così diverse in realtà esprimono la stessa cosa? Qui interviene il calcolo! Quando estendiamo il calcolo dei sequenti, potremmo dimostrare che

$$\forall x(S(x) \rightarrow \neg B(x, l)) \equiv \neg\exists(S(x) \wedge B(x, l))$$

L'esercizio non è ancora finito. Dobbiamo quantificare sulla seconda variabile. Per esempio, è corretto formalizzare "nessuno studente ama ogni corso" come $\forall w(C(w) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg B(x, w)))$? Altre idee? (un cosiglio: cercare di esprimere l'idea della sentenza in modo semplice)

Risolviamo quindi i punti 4–6 per passi. Prima un paio di suggerimenti. Molto spesso:

- con $\forall$ vogliamo selezionare gli individui che soddisfano una certa proprietà, ed usiamo $\rightarrow$.
- con $\exists$ vogliamo specificare tutte le proprietà che caratterizzano l'individuo che diciamo esista, ed usiamo $\wedge$.

4. Nessuno studente ama ogni corso

a. Uno studente x ama un corso y diventa $S(x) \wedge C(y) \wedge B(x, y)$

b. Uno studente x ama ogni corso diventa $S(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow B(x, y))$

c. Ci sono studenti che amano ogni corso diventa $\exists x(S(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow B(x, y)))$

d. Nessuno studente ama ogni corso diventa $\neg \exists x(S(x) \wedge \forall y(C(y) \rightarrow B(x, y)))$

Che mi dite della fomalizzazione:

$$\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(C(y) \wedge \neg B(x, y)))$$

5. Nessun corso è amato da tutti gli studenti

a. Un corso y è amato da tutti gli studenti diventa $C(y) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow B(x, y))$

b. Nessun corso è amato da tutti gli studenti diventa $\neg \exists y(C(y) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow B(x, y)))$

Che ne dite di questa formalizzazione:

$$\forall y(C(y) \to \exists x(S(x) \wedge \neg\, B(x, y)))$$

6. Non ci sono corsi amati da nessuno studente diventa $\neg\, \exists y(C(y) \wedge \neg \exists x(S(x) \wedge B(x, y)))$

Cosa possiamo dire invece della seguente formalizzazione:

$$\forall y(C(y) \to \exists x(S(x) \wedge B(x, y)))$$

Esercizio 2 *Come formalizzare la frase "non tutti gli uccelli volano"?*

3 Calcolo dei sequenti predicativo

[Questa sezione è tratta dalle note di Giovanni Sambin "Per Istruire un Robot – Seconda Parte"]

Per estendere il calcolo dei sequenti con le regole per i quantificatori, dobbiamo capire che cosa significano i segni "$\forall$" letto come *per ogni* e "$\exists$" letto come *esiste*. Per fare ciò ci basiamo ancora sul principio di riflessione. Per dare significato ai segni introduciamo le loro equazioni definitorie.

Consideriamo allora un dominio D sul quale vogliamo quantificare, ovvero studiamo le proprietà sugli elementi di D. Prendiamo la formula ben formata P, vi ricordo che quando scriviamo $P(x)$ ci stiamo concentrando sulla possibile occorrenza della variabile x in P (non sto dicendo nè che x appare libera in P, nè che x è l'unica variabile che può apparire in P!). Come leggiamo la formula $\forall x P(x)$? Vogliamo interpretarla come "per ogni elemento $d \in D$ la formula $P(d)$ è verificata". Ed ecco come trasformiamo questa intuizione in una equazione definitoria:

$$\Gamma \vdash \forall x P(x) \qquad \textit{sse} \qquad \Gamma \vdash P(d_1) \ \textit{e}\ \Gamma \vdash P(d_2) \ \textit{e}\ \Gamma \vdash P(d_3) \ \textit{e}\ \ldots \tag{1}$$

e dovrei continuare a chiedere $\Gamma \vdash P(d_i)$ per tutti gli elementi d_i del dominio D. Possiamo allora utilizzare una notazione più compatta:

$$\Gamma \vdash \forall x P(x) \qquad \textit{sse} \qquad \Gamma \vdash P(d) \ \textit{per ogni elemento } d \textit{ del dominio } D \tag{2}$$

Ricordo che gli elementi del dominio sono rappresentati nella sintassi dai termini, quindi per completare sintatticamente questa equazione definitoria posso ri-parafrasarla in

$$\Gamma \vdash \forall x P(x) \qquad \textit{sse} \qquad \Gamma \vdash P(t) \ \textit{per ogni termine } t \textit{ del linguaggio} \tag{3}$$

Questa è proprio l'equazione che ci serve. Detto a parole: dalle assunzioni Γ possiamo concludere $\forall x P(x)$ se (e solo se) da Γ riusciamo a concludere $P(t)$ dal solo fatto di sapere che t rappresenta un elemento del dominio di quantificazione. Attenzione: non devo avere nessuna altra assunzione su t, esso deve indicare un elemento *qualsiasi* del dominio, e non un certo elemento con particolari proprietà.

Risolviamo questa equazione definitoria. Procediamo come al solito. Il verso da sinistra verso destra dà la regola di formazione

$$\frac{\Gamma \vdash P(y)}{\Gamma \vdash \forall x P(x)}$$

ma questo non è proprio quello che la definizione vuole dire: ho cambiato di proposito y con t per sottolineare che y deve essere un generico elemento del dominio D. L'unica proprietà che y deve avere è quella di essere in D. Non possiamo avere altre assunzioni su y. Intuitivamente, se noi abbiamo derivato $\Gamma \vdash P(y)$, allora per poter dire che $\Gamma \vdash P(t)$ per tutti i termini t (ovvero tutti gli elementi di D) devo poter riscrivere la derivazione che mi ha portato a $P(y)$ come una derivazione che porta a $P(t)$. Per fare questo, l'unica possibilità che ho è che y *non compaia* in Γ. In tal modo, posso tranquillamente sostituire t al posto di y e ottengo una derivazione per $\Gamma \vdash P(t)$. Questo è l'unico modo operativamente valido per avere delle derivazioni finite (e quindi computabili). Non posso dire a una macchina: "se vuoi provare $\Gamma \vdash \forall x P(x)$ allora devi proprio metterti a derivare $\Gamma \vdash P(t)$ per tutti i termini t. E nemmeno posso dirle "fallo solo per le costanti (che rappresentano direttamente gli elementi di D)". Se il dominio D è infinito, allora quella povera macchina (come un povero essere umano che cerca una derivazione) non potrà mai provare una proposizione del tipo $\forall x \ldots$

Il fatto di chiedere che y non compaia in Γ è un ottimo espediente (meta–)logico per evitare di dover fornire una derivazione per ogni elemento del dominio e cadere quindi nella ricerca di infinite derivazioni.

La regola di $\forall$-*formazione* non si può quindi applicare sempre e a cuor leggero, ma bisogna che una certa condizione (side condition) sia verificata: la condizione richiesta è che y non compaia libero in Γ (sto sottointendendo l'ovvia generalizzazione del concetto di variabile libera in una lista di formule). Ecco la regola completa

$$\frac{\Gamma \vdash P(y)}{\Gamma \vdash \forall x P(x)}\ \forall\text{-}\textit{formazione}^{*}$$

**con* y *libero nel contesto* Γ

L'altro verso della equazione definitoria ci dà la regola

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x P(x)}{\Gamma \vdash P(t)}\ \forall\text{-}\textit{riflessione implicita}$$

Notate che in questo verso non dobbiamo specificare "per ogni termine t" perché è implicito nella regola (pensate ai casi di $\wedge$ o $\vee$ riflessione in cui implicitamente diciamo che possiamo introdurre qualsiasi formula noi desideriamo). Inoltre, ora potete ben capire perché questa *non* è una buona regola da dare al calcolo. Pensate alla ricerca delle prove. Una regola del genere non soddisfa la proprietà della sottoformula, e se dovessimo cercare una derivazione in cui appare tale regola, andando dal basso verso l'alto dovremmo ogni volta provare a considerare la quantificazione. Dovremmo quindi scegliere una variabile di quantificazione e questo renderebbe molto complesso l'algoritmo di ricerca.

Dobbiamo quindi raffinare la regola di riflessione esplicita usando la solita tecnica di risoluzione delle equazioni definitorie. Banalizziamo le premesse con $\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)$ e otteniamo:

$$\forall x P(x) \vdash P(t) \quad \forall\text{-}\textit{axiom}$$

E da qui con il solito taglio

$$\frac{\forall x P(x) \vdash P(t) \quad \Gamma, P(t) \vdash Q}{\Gamma, \forall x P(x) \vdash Q}$$

otteniamo la regola cercata

$$\frac{\Gamma, P(t) \vdash Q}{\Gamma, \forall x P(x) \vdash Q}\ \forall\text{-}\textit{riflessione esplicita}$$

Vi lascio come esercizio la verifica dell'equivalenza tra le varie regole. Come al solito basta provare che dalla riflessione esplicita segue l'assioma e da questo segue la riflessione implicita.

Passiamo ora al significato di $\exists x P(x)$, ovvero diamo l'equazione definitoria del quantificatore $\exists$. L'equazione (3) mette in evidenza la relazione tra il quantificatore $\forall$ e il connettivo $\wedge$: intuitivamente, scrivere $\forall x P(x)$ corrisponde a scrivere $P(d_1) \wedge P(d_2) \wedge \ldots$ per tutti gli elementi d_i del dominio. Possiamo dire che il $\forall$ corrisponde ad una applicazione, (potenzialemente infinita (dipende dal dominio D), del connettivo $\wedge$.

Come abbiamo fatto per il connettivo $\vee$, possiamo allora dare l'equazione del quantificatore $\exists$ riscrivendo per simmetria l'equazione definitoria (3) data per $\forall$. In questo modo vediamo subito che il quantificatore $\exists$ è in relazione con il connettivo $\vee$ allo stesso modo in cui il quantificatore $\forall$ è in relazione con connettivo $\wedge$. In pratica stiamo dando una proporzione che dice:

$$\exists : \forall = \vee : \wedge$$

L'equazione definitoria di $\exists$ è:

$$\exists x P(x) \vdash \Delta \qquad \textit{sse} \qquad P(t) \vdash \Delta \textit{ per ogni termine } t \textit{ del linguaggio} \tag{4}$$

Se riscrivete per simmetria le equazioni 1 e 2 potete vedere immediatamente che il quantificatore $\forall$ corrisponde al connettivo $\vee$ applicato a tutti gli elementi del dominio.

Vediamo subito l'intuizione che sta dietro a questa equazione definitoria. Praticamente è una generalizzazione dell'intuizione cha abbiamo dato per il connettivo $\vee$. Parafrasando la (4), per poter dire che dall'esistenza di un elemento per cui vale P concludo Δ devo sapere che posso concludere Δ dal fatto che P valga su un elemento qualunque. Dalla pura esistenza di un elemento su cui P vale, voglio concludere Δ. Questo vuol dire che lo devo poter concludere da qualunque elemento io abbia.

Supponiamo che sia un gioco tra me e voi. Io dico: "Dalla pura esistenza di un elemento che soddisfa P si ottiene Δ". Voi non mi crederete. Come fate a capire se io mi sto sbagliando? Scegliete un individuo del dominio che sapete esistere ed io devo mostrarvi che dal fatto che tale elemento soddisfa P segue comunque Δ. E voi siete liberi di scegliere qualunque individuo. In questo modo dimostriamo una direzione della equazione definitoria (quella da sinistra a destra).

Viceversa, se qualunque individuo io scelga, io dimostro che che dal fatto che quell'individuo soddisfa P segue Δ, vuol dire che Δ segue dalla pura esistenza. Per esempio [Sambin] supponiamo di dire una cosa del genere: "Chiunque abbia un antenato irlandese ha i capelli rossi." Ciò vuol dire:

$$\textit{"Esiste un tuo antenato che è irlandese"} \vdash \textit{"Tu hai i capelli rossi"}$$

Quindi

$$\exists x(\textit{"x è un tuo antenato"} \wedge \textit{"x è irlandese"}) \vdash \textit{"Tu hai i capelli rossi"}$$

Per convincermi di questo l' equazione definitoria ci dice che io dovrei far vedere che, qualunque individuo sia il mio antenato irlandese, io ho i capelli rossi.

Anche in matematica, molti teoremi hanno una premessa di tipo esistenziale, anche se non esplicitata. Per esempio, io potrei darvi un enunciato del genere: "se un certo polinomio ammette una soluzione positiva, allora succede una certa cosa Δ". Il dire "se ammette una soluzione positiva", (cioè se esiste un numero che è positivo e che è soluzione del polinomio) equivale a dire che *qualunque* sia la soluzione, quando ce l'ho io devo provare Δ. Provate a vederelo come una sfida, come gioco tra due persone, allora vedrete subito: se io voglio vincere, do l'enunciato e devo essere pronto a metterlo in atto. Allora mi si domanda: Se la soluzione positiva è d, tu lo sai fare? Io, per essere pronto a rispondere, devo sapere che per ogni d "se d è soluzione positiva" allora Δ, perché non so quale d verrà scelto a testimoniare il fatto che il polinomio ammette una soluzione positiva.

Notate ancora la profonda analogia con il quantificatore $\wedge$. Noi non sappiamo bene cosa voglia dire 'esiste', abbiamo spiegato il 'per ogni', e non è un caso. L'esiste è come la *e* al meta-linguaggio e la *oppure*. Il concetto di oppure noi non l'abbiamo al metalinguaggio, l'abbiamo solo come connettivo al linguaggio. Per poter dire una *oppure* in realtà siamo passati attraverso una *e*.

Veniamo alle regole. Procediamo come abbiamo fatto per $\forall$. Il verso da sinistra verso destra dà la regola di formazione

$$\frac{P(y) \vdash \Delta}{\exists x P(x) \vdash \Delta}\ \exists\textit{-formazione}^*$$

$$^*\textit{con } y \textit{ libero nel contesto } \Delta$$

Ancora una volta, devo richiedere che y rappresenti un elemento qualsiasi del dominio: su y non ci devono essere altre assunzioni, se non quella di stare nel dominio. Questo si traduce formalmente nella richiesta che y non appaia libera in altre parti del sequente nelle premesse.

L'altro verso della equazione (4) ci da la regola

$$\frac{\exists x P(x) \vdash \Delta}{P(t) \vdash \Delta}\ \exists\textit{-riflessione implicita}$$

Che come al solito deve essere raffinata. Prima, banalizzando le premesse (con $\exists x P(x) \vdash \exists x P(x)$) otteniamo:

$$P(t) \vdash \exists x P(x) \quad \exists\textit{-axiom}$$

Notate che stiamo ritrovando il il significato usuale di $\exists$. L'assioma, infatti, ci dice che se abbiamo un elemento del dominio, e sappiamo che P vale su quell' elemento, allora qualunque sia l'elemento che abbiamo, possiamo concludere che esiste un elemento di D per cui vale P.

Infine, con un taglio otteniamo

$$\frac{\Gamma \vdash P(t)}{\Gamma \vdash \exists x P(x)}\ \textit{$\exists$-riflessione esplicita}$$

Vi lasco per esercizio, la dimostrazione che queste tre ultime regole sono tra loro equivalenti. Al solito, provate che dalla riflessione esplicita segue l'assioma e da questo segue la riflessione implicita.

Dopo aver risolto le equazioni definitorie, possiamo estendere i due calcoli proposizionali LJ e LK introducendo le regole per i quantificatori. Vi ricordo che la differenza tra i due è che LJ non ammette contesto libero alla destra di un sequente. Ecco allora le regole che dobbiamo aggiungere. Fate attenzione alle condizioni nelle regole di formazione!

Tabella 1 Quantificatori in LJ.

$\dfrac{\Gamma, P(t) \vdash Q}{\Gamma, \forall x P(x) \vdash Q}$ *$\forall$-rifl.*	$\dfrac{\Gamma \vdash P(y)}{\Gamma \vdash \forall x P(x)}$ *$\forall$-form.**	**con* y *libero in* Γ
$\dfrac{\Gamma, P(y) \vdash Q}{\Gamma, \exists x P(x) \vdash Q}$ *$\exists$-form.***	$\dfrac{\Gamma \vdash P(t)}{\Gamma \vdash \exists x P(x)}$ *$\exists$-rifl.*	***con* y *libero in* Γ *e* Q

Tabella 2 Quantificatori in LK.

$\dfrac{\Gamma, P(t) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x P(x) \vdash \Delta}$ *$\forall$-rifl.*	$\dfrac{\Gamma \vdash P(y), \Delta}{\Gamma \vdash \forall x P(x), \Delta}$ *$\forall$-form.**	**con* y *libero in* Γ *e* Δ
$\dfrac{\Gamma, P(y) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x P(x) \vdash \Delta}$ *$\exists$-form.**	$\dfrac{\Gamma \vdash P(t), \Delta}{\Gamma \vdash \exists x P(x), \Delta}$ *$\exists$-rifl.*	

Le condizioni sulle regole di formazione sono *fondamentali*. Se non ci fossero potremmo derivare:

$$\dfrac{\dfrac{A(z) \vdash A(z)}{A(z) \vdash \forall x A(x)}\ \textit{$\forall$-form. (senza condizione!)}}{\exists x A(x) \vdash \forall x A(x)}\ \textit{$\exists$-rifl.}$$

Il senquente che abbiamo derivato suona come Paperon de Paperoni che dice: "Siccome io sono riuscito a diventare miliardario, allora tutti possono diventare miliardari, e la mia regola è quella giusta!" Un ragionamento di questo tipo non funziona, perché afferma che se esiste un individuo tale che... allora tutti..., e questo è chiaramente sbagliato (inoltre nel caso specifico c'è un vizio logico evidente). In matematica dire che esiste un punto in cui una funzione vale O non significa che la funzione è nulla (costantemente 0). Quindi un sistema che ci porta a dimostrare che da un 'esiste' segue un 'per ogni' non è affidabile. Il punto chiave è che non abbiamo obbedito alla condizione che il contesto *non* dipenda da z.

4 Derivazioni nei calcoli predicativi LJ e LK

Considerate i calcoli LJ e LK estesi con le regole per i quantificatori date nelle Tabelle 1 e 2. Nel seguito, quando vi è richiesto di trovare una derivazione per un sequente, provare prima in LJ e se questo risulta impossibile, provate in LK. Vi ricordo inoltre che con $A \equiv B$ intendiamo contemporaneamente $A \vdash B$ e $B \vdash A$. Una raccomandazione: *non violate le condizioni sulle variabili libere!*

Esercizio 3 *In che relazione stanno i quantificatori? Provare a derivare (in LJ o LK)*

1. $\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y)$
2. $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$
3. $\forall x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \forall x A(x, y)$
4. $\forall x \neg A(x) \equiv \neg \exists x A(x)$
5. $\exists x \neg A(x) \equiv \neg \forall x A(x)$

Esercizio 4 *Verificare se questi sequenti sono derivabili, fornendo la derivazione (in LJ o LK).*

1. $A(x) \vdash A(y)$
2. $\forall x A(x) \vdash \forall y A(y)$
3. $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
4. $\forall x(A \to B) \vdash \forall x A \to \forall x B$
5. $\forall x A \to \forall x B \vdash \forall x(A \to B)$ *(*)*
6. $\exists x(A \to B) \vdash \exists x A \to \exists x B$
7. $\exists x A \to \exists x B \vdash \exists x(A \to B)$ *(*)*
8. $A \to \forall x B(x) \equiv \forall x(A \to B(x))$ ***se x non compare libera in A*** *(*)*
9. $\vdash \exists y(C(y) \to \forall x C(x))$ *(paradosso dell'uomo col cappello)*
10. $\forall x(\neg R(x, x) \to R(b, x)) \wedge \forall x(R(b, x) \to \neg R(x, x)) \vdash \perp$ *(Paradosso del barbiere)*

Esercizio 5 *Assumete che x non sia libera in A. Date una derivazione:*

1. $A \to (Q_1 \wedge Q_2) \vdash (A \to Q_1) \wedge (A \to Q_2)$
2. $A \to \forall x Q(x) \vdash \forall x(A \to Q(x))$
3. $(P_1 \to Q_1) \wedge (P_2 \to Q_2) \vdash P_1 \wedge P_2 \to Q_1 \wedge Q_2$
4. $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

4.1 Ancora osservazioni sui quantificatori e le loro regole

In questa sezione cerchiamo di ribadire con esempi i concetti già introdotti nella Sezione 3 Capire una regola risulta più facile se ricordiamo cosa è $P(x)$: esso diventa una proposizione quando sostituiamo un individuo del dominio al posto di x.

La regola di $\forall$ formazione. Vediamo con altri esempi il senso della regola di $\forall$ formazione. Tale regola dice che che se sappiamo provare A per un certo z, e che quello z non ha niente di speciale (in particolare, non ne assumiamo nulla come condizione), allora sappiamo provare A per un x qualunque.

Ad esempio, consideriamo il dominio degli studenti di logica e diciamo

$$A(z) : \textit{“lo studente } z \textit{ ha passato l'esame”}$$

Se ignoriamo la condizione sulla $\forall$-*form*, potremmo ragionare come segue:

$$\frac{A(z) \vdash A(z)}{A(z) \vdash \forall x A(x)} \quad \textit{(da non fare!)}$$

Cosa significa? Scegliamo un elemento particolare del dominio. Prendiamo $z = m$, dove m : “Miriam”. Allora abbiamo dimostrato

$$A(m) \vdash \forall x A(x)$$

Dal fatto che Miriam passa l'esame, concludo che tutti gli studenti passano l'esame... Dove è l'errore? Sto deducendo $A(x)$ vero per qualunque x, quando invece lo so solo per un certo z, di cui assumo che ha passato l'esame.

Un'altro esempio. Io affermo che sono capace spezzare in due una pallina da tennis, con una mano sola. Per dimostrarvelo tiro fuori dal mio zaino una pallina da tennis, e la spezzo in due. Voi mi credete? Sicuramente vi andrebbe meglio se vi dico “Ok, datemi una pallina da tennis, ed io la spezzo in due.” Voi mi date la pallina, ed io mantengo la promessa... D'altra parte, non potete darmi *tutte* le palline da tennis. Come potete essere sicuri che io le so spezzare tutte? Me ne date una “generica”, che non ha niente di speciale rispetto alle altre (e non è stata preparata prima).

La regola di $\forall$ riflessione. Potremmo allora chiederci: *“Perché non ci sono condizioni sulla regola di $\forall$-riflessione?”* Riprendiamo l'esempio precedente considerando il dominio composto da studenti che hanno sostenuto l'esame ad un certo appello.

$$\frac{A(z) \vdash A(z)}{\forall x A(x) \vdash A(z)} \ \forall\text{-}\textit{rifl.}$$

Detto a parole. Se sappiamo che un certo studente z ha passato l'esame, allora sappiamo che z ha passato l'esame. Ne deduciamo che se sappiamo che tutti gli studenti hanno passato l'esame, allora sappiamo in particolare che z ha passato l'esame.

Notate ancora l'analogia con il connettivo $\wedge$. Stiamo facendo qualcosa di molto simile a quanto accade con $\wedge$-*rifl*

$$\frac{B \vdash D}{B \wedge C \vdash D}$$

Da pensare come:

$$\frac{A(y) \vdash D}{A(y) \wedge A(z) \vdash D}$$

Come già detto, per capire le regole è utile pensare $\forall$ come una $\wedge$ infinita: $A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge A(x_3) \wedge \ldots$ dove x_i varia su tutti gli elementi del dominio. A volte questa intuizione può anche aiutare a trovare una derivazione (vedi Ex. 5)

Discorsi analoghi si possono fare per il quantificatore $\exists$. Simmetricamente, è importante pensare $\exists$ come una $\vee$ infinita: $\exists x A(x)$ funziona come $A(x_1) \vee A(x_2) \vee A(x_3) \vee \ldots$ dove x_i varia su tutti gli elementi del dominio.

4.2 Cercare una derivazione in presenza dei quantificatori

Da quanto abbiamo detto, è facile vedere che $A(x) \vdash A(x)$ è derivabile, mentre $A(x) \vdash A(y)$ no. Se il secondo valesse, potremmo assegnare ad x un elemento del dominio, e ad y uno diverso, ottenendo qualcosa tipo:

“Alice passa l'esame comporta che Bob passa l'esame.”

Regole di formazione. Se abbiamo $\Gamma \vdash \forall x A(x)$, e stiamo cercando una prova procedendo *dal basso verso l'alto*, le regole di formazione non presentano alcun problema. Dobbiamo solo fare attenzione a scegliere una variabile z che non appare libera in nessuna altra formula. Questo possiamo farlo sempre (abbiamo una quantità illimitata di nomi di variabili tra cui scegliere, non solo z!), e la scelta è del tutto arbitraria: purché non sia già usato per una variabile libera, tutti i nomi si equivalgono.

Ad esempio, supponiamo di avere $A(z), \forall x B(x) \vdash \forall x A(x)$. Procedendo verso l'alto entrambe queste strade vanno bene:

$$\frac{A(z), \forall x B(x) \vdash A(y)}{A(z), \forall x B(x) \vdash \forall x A(x)} \qquad \frac{A(z), \forall x B(x) \vdash A(x)}{A(z), \forall x B(x) \vdash \forall x A(x)}$$

Nota: la seconda scelta va benissimo, ma potrebbe creare confusione.

Invece *non* va bene:

$$\frac{A(z), \forall x B(x) \vdash A(z)}{A(z), \forall x B(x) \vdash \forall x A(x)}$$

Regole di riflessione. Serve un po' di tattica! Sempre dal basso verso l'alto, se abbiamo $\Gamma, \forall x A(x) \vdash B$, la regola di $\forall$-*riflessione* (e analogamente quella di $\exists$-*riflessione*) richiede più attenzione di quanto sembri. Il punto è che:

– La regola di riflessione può scegliere qualunque nome di variabile.

– La regola di formazione è vincolata: deve rispettare la condizione.

Notate quindi che le regole di riflessione si possono adeguare a a qualunque scelta facciano le rispettive regole di formazione. La morale è quindi: *quando possibile, è buona tattica posticipare l'applicazione delle regole di riflessione.*

Ex. 4.2 Vediamo cosa succede se iniziamo a con la formazione o con la riflessione.

Formazione:

$$\cfrac{\cfrac{A(z) \vdash A(z)}{\forall x A(x) \vdash A(z)}}{\forall x A(x) \vdash \forall y A(y)}$$

Riflessione:

$$\cfrac{\cfrac{?\textsc{scacco}?}{A(z) \vdash \forall x A(x)}}{\forall x A(x) \vdash \forall y A(y)}$$

...ci troviamo bloccati. In una situazione come questa, conviene resistere alla tentazione di forzare e *ripensare* la derivazione, oppure – come abbiamo già fatto – considerare la contrazione.

Contrazione. Come in tutte le situazioni in cui ci troviamo bloccati, possiamo guardare "sotto" nella derivazione se c'è una formula che ci aiuta, e la duplichiamo usando la regola di contrazione. In generale, se abbiamo $\Gamma, \forall x A(x) \vdash B$, possiamo mantenere una copia di $\forall x A(x)$, da usare come "generatore" di formule della forma $A(x), A(y), A(z), \ldots$

Potremmo usare questa tecnica anche nel caso sopra: in pratica, è un modo per ricondurci al caso "prima formazione, poi riflessione".

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A(z), A(w) \vdash A(w)}{A(z), \forall x A(x) \vdash A(w)}}{A(z), \forall x A(x) \vdash \forall y A(y)}}{\forall x A(x) \vdash \forall y A(y)}\ \forall\text{-}\textit{rifl.} + \textit{contr.}$$

(Mal) usata in questo esempio, la soluzione è molto *poco elegante* perché introduce passi inutili, ma in certi casi è necessaria...

In pratica, la regola di contrazione ci permette di tenere a sinistra una copia di $\forall x A(x)$, da usare come *generatore* di $A(x_i)$, secondo il bisogno di variabili.

$$\boxed{\dfrac{\Gamma, \forall x A(x), A(z) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x A(x) \vdash \Delta}}$$

4.3 Alcuni commenti sugli esercizi

Ex. 4.5 [Sambin] È istruttivo interpretare il sequente che dovremmo derivare. Consideriamo

$$\begin{array}{rcl} A(x) & : & \text{“}\,x\ \textit{rema}\text{”} \\ B(x) & : & \text{“}\,x\ \textit{si salva}\text{”} \end{array}$$

e immaginiamo che il dominio D sia costituito dei naufraghi di una nave, sopra una scialuppa di salvataggio (grande e pesante: si muove se e solo se tutti remano). Abbiamo

$$\begin{array}{rcl} \forall x A(x) \to \forall x B(x) & : & \textit{“Se tutti remano, tutti si salvano”} \\ \forall x (A(x) \to B(x)) & : & \textit{“qualunque sia il naufrago, se lui (anche solo) rema, lui si salva”} \end{array}$$

La prima è ragionevole, ma la seconda...

Ex. 4.7 Se nella derivazione trovate qualche problema, provate a pensare cosa succede se

$$\begin{array}{rcl} A(x) & : & \text{“}\,x\ \textit{ha un figlio}\text{”} \\ B(x) & : & \text{“}\,x\ \textit{é nonno}\text{”} \end{array}$$

Ex. 4.8 Cosa succederebbe senza la condizione “x non compare libera in A”? Proviamo a prendere per B lo stesso A. Otteniamo $\forall x (A \to A) \vdash A(x) \to \forall x A(x)$, e poiché l'antecedente è vero, stiamo affermando $A(x) \to \forall x A(x)$. Torniamo al problema discusso sopra: “dall'osservazione che un certo gatto è grigio, posso concludere che tutti i gatti sono grigi”

Ex. 4.9 Mettiamoci in LJ. Notiamo innanzitutto che l'*unico* modo di derivare (in LJ) $vdash \exists x A(x)$ è quello di concludere la derivazione con una $\exists$-*rifl* in questo modo

$$\frac{\vdash A(t)}{\vdash \exists x A(x)}$$

Questo ci dice che per provare $\vdash \exists x A(x)$ in LJ, ci serve un *testimone* per la proposizione A. Intuitivamente: per dire che esiste un elemento del dominio che soddisfa A dobbiamo effettivamente mostrare quale è l'elemento in questione.

Detto ciò, è immediato convincersi che $\vdash \exists y (C(y) \to \forall x C(x))$ non si può derivare in LJ. La sua derivazione dovrebbe essere

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{C(z) \vdash C(w)}{C(z) \vdash \forall x C(x)}\,*}{\vdash C(z) \to \forall x C(x)}}{\vdash \exists y (C(y) \to \forall x C(x))}$$

Nella regola $*$ non posso scegliere l'unica variabile che mi permetterebbe di concludere (z) perché devo rispettare la condizione sulle variabili libere.

Vediamo invece in LK.

$$
\begin{array}{c}
C(w) \vdash C(w) \\ \hline
C(z), C(w) \vdash C(w) \\ \hline
C(z), C(w) \vdash C(w), \forall x C(x) \\ \hline
C(z) \vdash C(w), C(w) \to \forall x C(x) \\ \hline
C(z) \vdash C(w), \exists y(C(y) \to \forall x C(x)) \\ \hline
C(z) \vdash \forall x C(x), \exists y(C(y) \to \forall x C(x)) \quad * \\ \hline
\vdash C(z) \to \forall x C(x), \exists y(C(y) \to \forall x C(x)) \\ \hline
\vdash \exists y(C(y) \to \forall x C(x)), \exists y(C(y) \to \forall x C(x)) \\ \hline
\vdash \exists y(C(y) \to \forall x C(x))
\end{array}
$$

Ex. 4.10 Per una descrizione delle premesse del sequente vi rimando all'Esempio 4.9 del libro di testo. Chi rade il barbiere? Deriviamo l'inconsistenza (in LJ):

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(b,b) \vdash R(b,b) \quad \dfrac{R(b,b) \vdash R(b,b)}{R(b,b), \neg R(b,b) \vdash \bot}}{R(b,b) \to \neg R(b,b), R(b,b) \vdash \bot}}{R(b,b) \to \neg R(b,b) \vdash \neg R(b,b)} \qquad \dfrac{R(b,b) \vdash R(b,b) \quad \dfrac{R(b,b) \vdash R(b,b)}{R(b,b), \neg R(b,b) \vdash \bot}}{R(b,b) \to \neg R(b,b), R(b,b) \vdash \bot}}{\neg R(b,b) \to R(b,b), R(b,b) \to \neg R(b,b) \vdash \bot}}{\neg R(b,b) \to R(b,b), \forall x(R(b,x) \to \neg R(x,x)) \vdash \bot}}{\dfrac{\forall x(\neg R(x,x) \to R(b,x)), \forall x(R(b,x) \to \neg R(x,x)) \vdash \bot}{\forall x(\neg R(x,x) \to R(b,x)) \wedge \forall x(R(b,x) \to \neg R(x,x)) \vdash \bot}}
$$

5 Esercizi.

Esercizio 6 *Dire se sono derivabili in LJ. Se non è possibile in LJ, provare in LK. Nelle derivazioni, indicare quando la condizione sulle variabili libere deve essere soddisfatta.*

1. $\exists x A \vee \exists x B \doteq \exists x(A \vee B)$
2. $\forall x(P(x) \to Q(x)), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$ *(*)*
3. $\neg\neg\forall x A(x) \vdash \forall x \neg\neg A(x)$ *(*)*
4. $\forall x(Q(x) \to R(x)), \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x))$
5. $\exists x P(x), \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall y Q(y)$ *(*)*
6. $\exists x P(x), \forall x \forall y(P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$ *(*)*
7. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
8. $\exists x \forall y A(x,y) \vdash \forall y \exists x A(x,y)$
9. $\exists x A(x) \wedge \exists x B \vdash \exists x(A(x) \wedge B)$, **con** x **non libera in** B. *(Cosa succederebbe se x fosse libera in B)?*

5. Un bell'esercizio Derivare questo sequente (se possibile):
$\forall x(Ax \ \wedge \ \exists y \neg Ay) \vdash \bot$

6. Dimostrare che NON è derivabile in LJ:
$\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$

Esercizio 7 *Fornire una derivazione in LJ.*

1. $\neg \forall x (P \vee Q) \vdash \neg (\forall x P \vee \forall x Q)$
2. $(A \to \neg A) \vdash \neg A$
3. $\exists x \forall y \neg (A(y) \vee B(x)) \vdash \forall y \exists x \neg B(x)$

Esercizio 8 *Costruire una derivazione in LJ per questi sequenti. Se non ci riuscite o se non è possibile in LJ, fornire una derivazione in LK. Specificare la logica usata.*

1. $\neg (\neg\neg A \to A) \vdash \bot$
2. $\vdash \exists x (A(x) \vee \neg \exists x A(x))$
3. $\vdash \exists x (\exists x A(x) \to A(x))$
4. $\forall x (Ax \to \neg \exists y B(x, y)), \forall z \forall w B(z, w) \vdash \neg \exists x Ax$

6 F.A.Q. (meglio ripetersi per evitare errori/incomprensioni)

Cose è *esattamente* una variabile libera? Per banale che sia... è libera una variabile non legata.

È legata una variabile quantificata, cioé una variabile che compare nello scope di un quantificatore. Per esempio, in $\forall x A(y, x)$, x e' legata, y e' libera.

Importante. Ricordare che quando passiamo da B(x) a B(z) intendiamo che sostituiamo z a tutte le occorrenze libere di x in B. Quindi:

1. Se x è libera in B:
$$\frac{\vdash B(z)}{\vdash \forall x B(x)}$$

2. Se x non è libera in B:
$$\frac{\vdash B}{\vdash \forall x B}$$

1. ***Se non e' specificato*** che x *non e' libera* in B, ed abbiamo una formula come $\forall x B$ conviene scrivere x esplicitamente: $\forall x B(x)$
2. ***Se x non e' libera in B***, sostituire z ad x in B non produce alcun effetto (proprio perché non ci sono occorrenze libere di x in B).

È corretta questa derivazione? (errore comune)

$$\cfrac{\cfrac{\dots}{Az \vee C \vdash \exists x (Ax \vee C)}\ \text{No!}}{\exists Ax \vee C \vdash \exists x (Ax \vee C)}$$

No! Le regole operano *solo* sul connettivo o quantificatore più esterno (top level). Per accedere ad $\exists Ax$ a sinistra, dobbiamo prima decomporre il connettivo $\vee$.

Un altro errore comune è questo:

$$\frac{\neg\neg Az \vdash \dots}{\neg\neg \forall x Ax \vdash \dots}\ \text{No!}$$

Non si può decomporre un quantificatore che è interno ad un altro connettivo o quantificatore. Bisogna rispettare l'ordine con cui si è (ben) formata la formula.

Si può sostituire una formula con una equivalente? No. Il motivo è che il calcolo si interessa a costruire una derivazione, non tanto a stabilire la "validita" di una formula. Una derivazione deve usare regole precise, e solo quelle.