Logica Matematica	*tempo a disposizione: 2:30 h*
Anno Accademico 2010/2011	*giustificare tutte le risposte*
Esame del 16 Febbraio 2011	*consegnare solo la 'bella'*

Linguaggio Proposizionale

Esercizio 1.
Considerate connettivo $\leftarrow$ introdotto nel calcolo proposizionale dalla seguente equazione definitoria:

$$\Gamma, A \leftarrow B \vdash \Delta \quad \textit{se e solo se} \quad \Gamma, A \vdash B, \Delta$$

a. Risolvete questa equazione definitoria. Ovvero: trovate delle "buone" regole da aggiungere al calcolo dei sequenti che siano *equivalenti* all'equazione, e provatene l'equivalenza.

b. Che relazione c'è tra questo nuovo connettivo e l'implicazione?

Esercizio 2.
Fornite una derivazione in LJ dei sequenti elencati. Nel caso non sia possibile, discutete perché non esiste una derivazione in LJ (con un contro-modello) e fornitene una in LK. Se non è possibile dare una derivazione neppure in LK, presentate un contro-modello.

a. $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

b. $\neg(A \rightarrow B) \vdash A \wedge \neg B$

c. $\neg(A \rightarrow B),\ \neg(A \wedge \neg B) \vdash \bot$

Esercizio 3.
Considerate la semantica della logica classica e discutete la validità delle seguenti asserzioni. Giustificate le risposte.

a. $A \wedge B$ è soddisfacibile se e solo se A è soddisfacibile e B è soddisfacibile.

b. $A \vee B$ è soddisfacibile se e solo se A è soddisfacibile oppure B è soddisfacibile.

Esercizio 4.
Sia Γ un insieme di formule ben formate consistente massimale. Si dimostri che

$$A \in \Gamma \text{ se e solo se } \Gamma \vdash A \text{ è derivabile in LK.}$$

Linguaggio Predicativo

Esercizio 5.
Fornite una derivazione in LJ dei sequenti elencati. Nel caso non sia possibile, discutete perché non esite una derivazione in LJ (anche con un contro-modello) e fornitene una in LK. Se non è possibile dare una derivazione neppure in LK discutetene il motivo.

a. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \vdash \exists x\,(A(x) \wedge B(x))$

b. $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$

c. $\neg\forall x(A(x) \wedge B(x)) \vdash \exists x \neg A(x) \vee \exists x \neg B(x)$

Linguaggio Quotidiano

Esercizio 6.
Stabilite quale tra le seguenti affermazioni corrisponde alla negazione della frase

"Can che abbaia non morde."

a. *"Tutti i cani che abbaiano mordono."*

b. *"C'è almeno un cane che abbaia e morde."*

c. *"C'è almeno un cane che non abbaia e morde."*

d. *"Tutti i cani che non abbaiano non mordono."*

e. *"C'è almeno un cane che non abbaia e non morde."*

Usando il linguaggio del primo ordine, formalizzate sia l'affermazione data che quella da voi scelta e mostrate che la loro congiunzione comporta il falso.

Esercizio 7.
Considerate il dominio $\mathcal{D}$ delle squadre di calcio. Formalizzate le seguenti asserzioni nel linguaggio della logica del primo ordine. Usate le opportune costanti e i seguenti predicati:

$$\begin{array}{ll} B(x, y) & \text{“}x \text{ ha sconfitto } y\text{”} \\ V(x) & \text{“}x \text{ vince il campionato”} \end{array}$$

a. *"Solo una squadra può vincere il campionato."*

b. *"Se l'Inter vince il campionato, allora ogni altra squadra lo perde."*

c. *"Una squadra sconfitta da tutti non può vincere il campionato."*

d. *"Milan e Inter hanno sconfitto le stesse squadre."*

e. *"La Roma ha sconfitto una squadra che ha vinto contro la Lazio."*

f. *"Alcune squadre sono state battute da tutti."*

g. *"Il Napoli ha perso contro tutte le squadre che hanno vinto contro Fiorentina."*

h. *"Juventus e Torino sono le uniche squadre imbattute."*

Rispondete con argomentazioni logiche alla seguente domanda: è possibile che due squadre siano sconfitte da tutti?