Ordinamento

Damiano Macedonio
Università Ca' Foscari di Venezia

mace@unive.it

Original work Copyright © Alberto Montresor, University of Trento
(http://www.dit.unitn.it/~montreso/asd/index.shtml)
Modifications Copyright © 2009, 2010, Moreno Marzolla, Università di Bologna
Modifications Copyright © 2012, Damiano Macedonio, Università Ca' Foscari di Venezia

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/ or send a letter to Creative Commons, 543 Howard Street, 5th Floor, San Francisco, California, 94105, USA.

Ordinamento

- Consideriamo un array di n numeri $v[1], v[2], \dots v[n]$
- Vogliamo trovare (indirettamente) una permutazione

  $$p[1], p[2], \dots p[n]$$

  degli interi 1, ..., n tale che

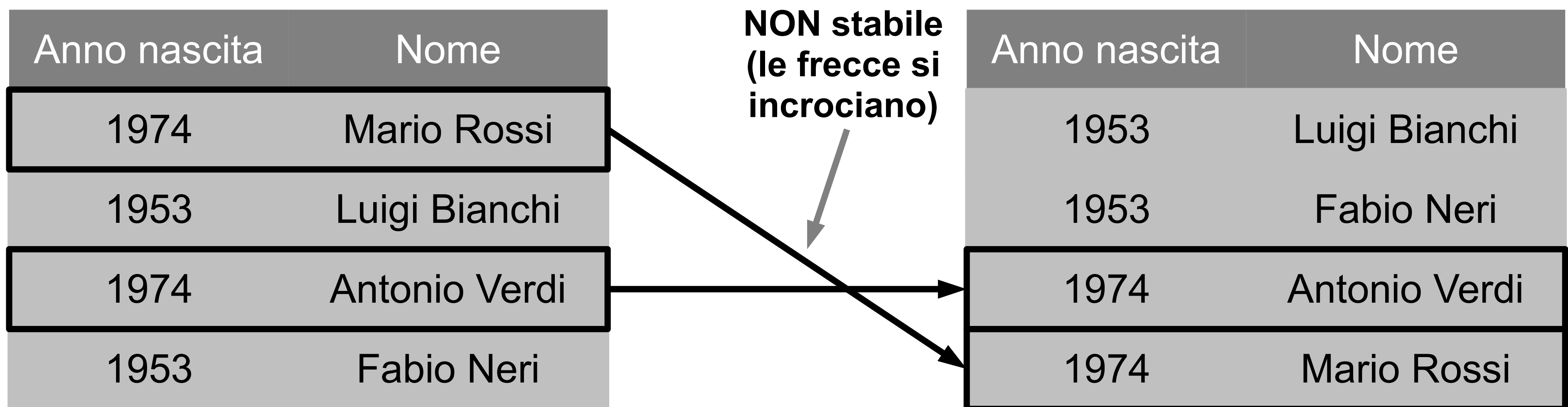
  $$v[p[1]] \leq v[p[2]] \leq \dots \leq v[p[n]]$$
- Esempio:
  - v = [7, 32, 88, 21, 92, -4]
  - p = [6, 1, 4, 2, 3, 5]
  - v[p[]] = [-4, 7, 21, 32, 88, 92]

Ordinamento

- Più in generale: è dato un array di n elementi, tali che ciascun elemento sia composto da:
  - una **chiave**, in cui le chiavi sono confrontabili tra loro
  - un **contenuto** arbitrario
- Vogliamo permutare l'array in modo che le chiavi compaiano in ordine non decrescente (oppure non crescente)

Definizioni

- Ordinamento in loco
  - L'algoritmo permuta gli elementi direttamente nell'array originale, senza usare un altro array di appoggio
- Ordinamento stabile
  - L'algoritmo preserva l'ordine con cui elementi con la stessa chiave compaiono nell'array originale



Nota

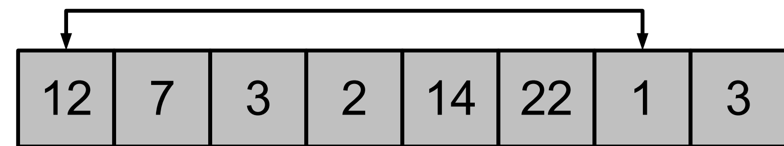
- È possibile rendere ogni algoritmo stabile:
  - Basta usare come chiave di ordinamento la coppia (chiave, posizione nell'array non ordinato)
  - (k1, p1) < (k2, p2) se e solo se:
    - (k1 < k2), oppure
    - (k1 == k2) and (p1 < p2)

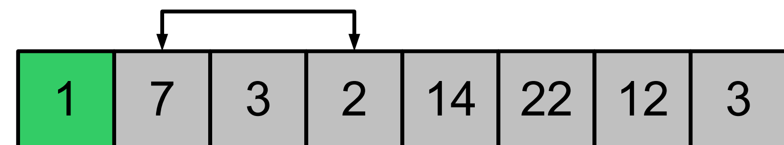
Algoritmi di ordinamento "incrementali"

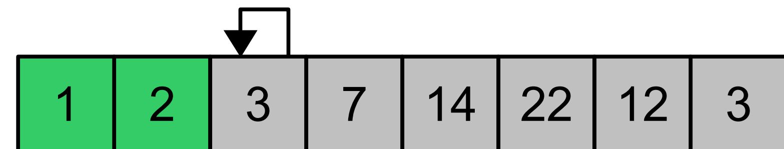
- Partendo da un prefisso A[1..k] ordinato, "estendono" la parte ordinata di un elemento: A[1..k+1]
- Selection sort
  - Cerca il minimo in A[k+1..n] e spostalo in posizione k+1
- Insertion sort
  - Inserisce l'elemento A[k+1] nella posizione corretta all'interno del prefisso già ordinato A[1..k]

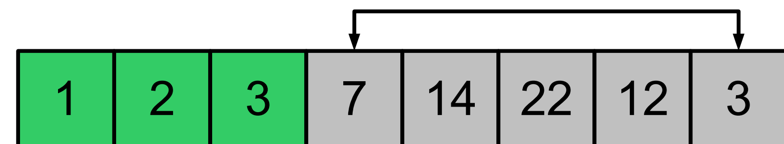
Selection Sort

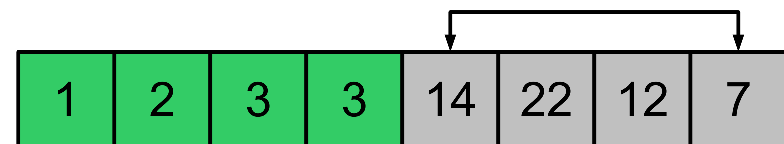
- Cerco il minimo in A[1]...A[n] e lo scambio con A[1]
- Cerco il minimo in A[2]...A[n] e lo scambio con A[2]
- ...
- Cerco il minimo in A[k]...A[n] e lo scambio con A[k]
- ...

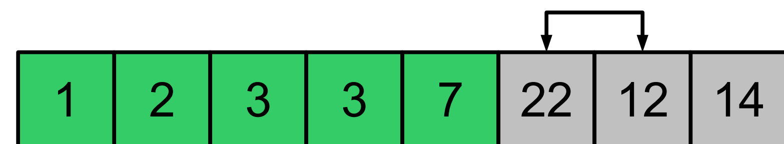


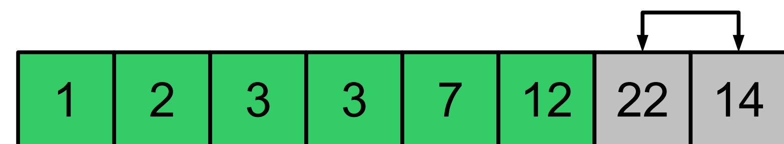


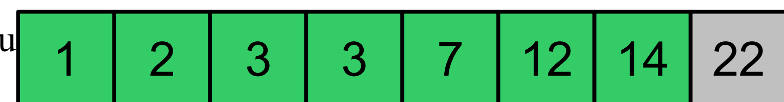






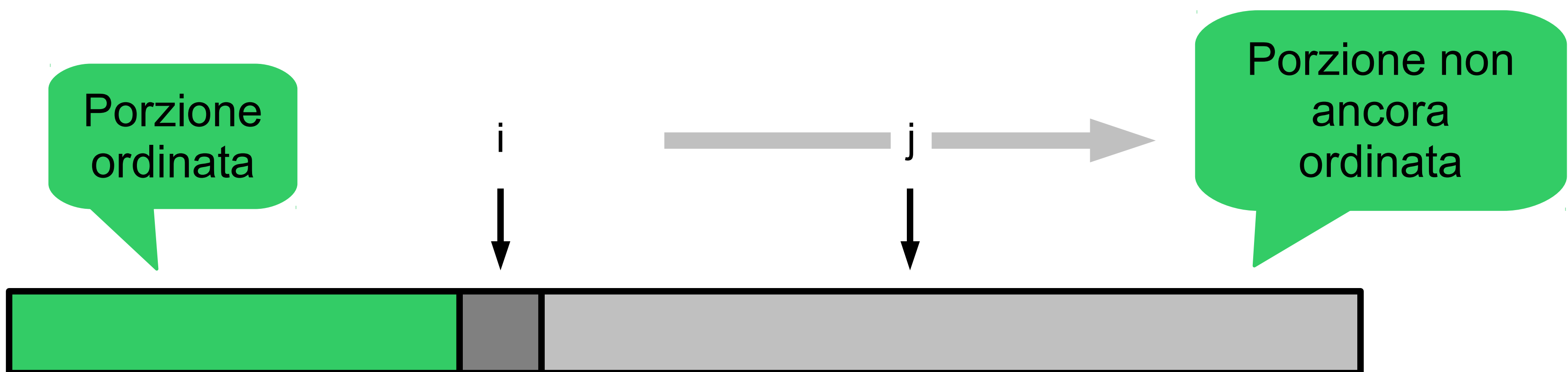






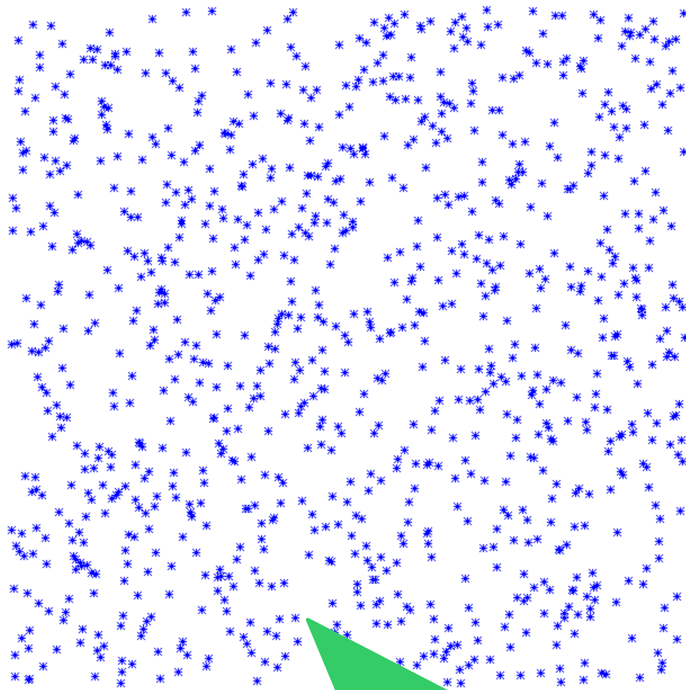
Selection Sort

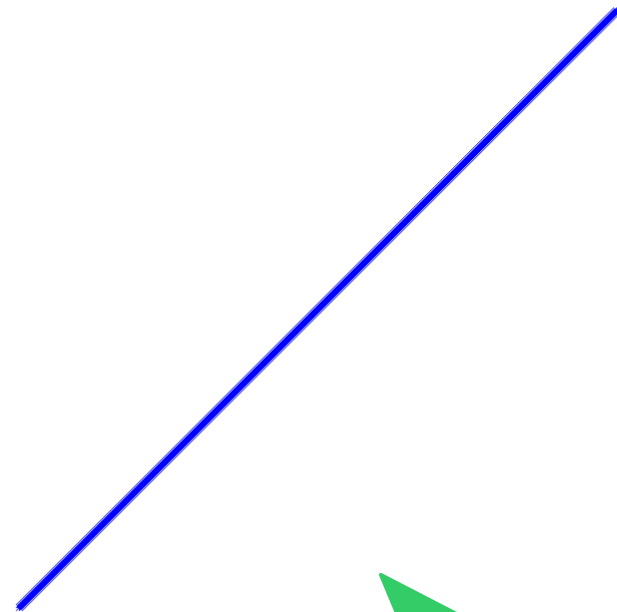
```
Algoritmo selectionSort(array A)
    for i = 1 to A.length - 1
        // cerca il minimo A[m] in A[i..n]
        int m = i
        for j = i + 1 to A.length
            if A[j] < A[m] then m = j
        scambia A[i] con A[m]
```



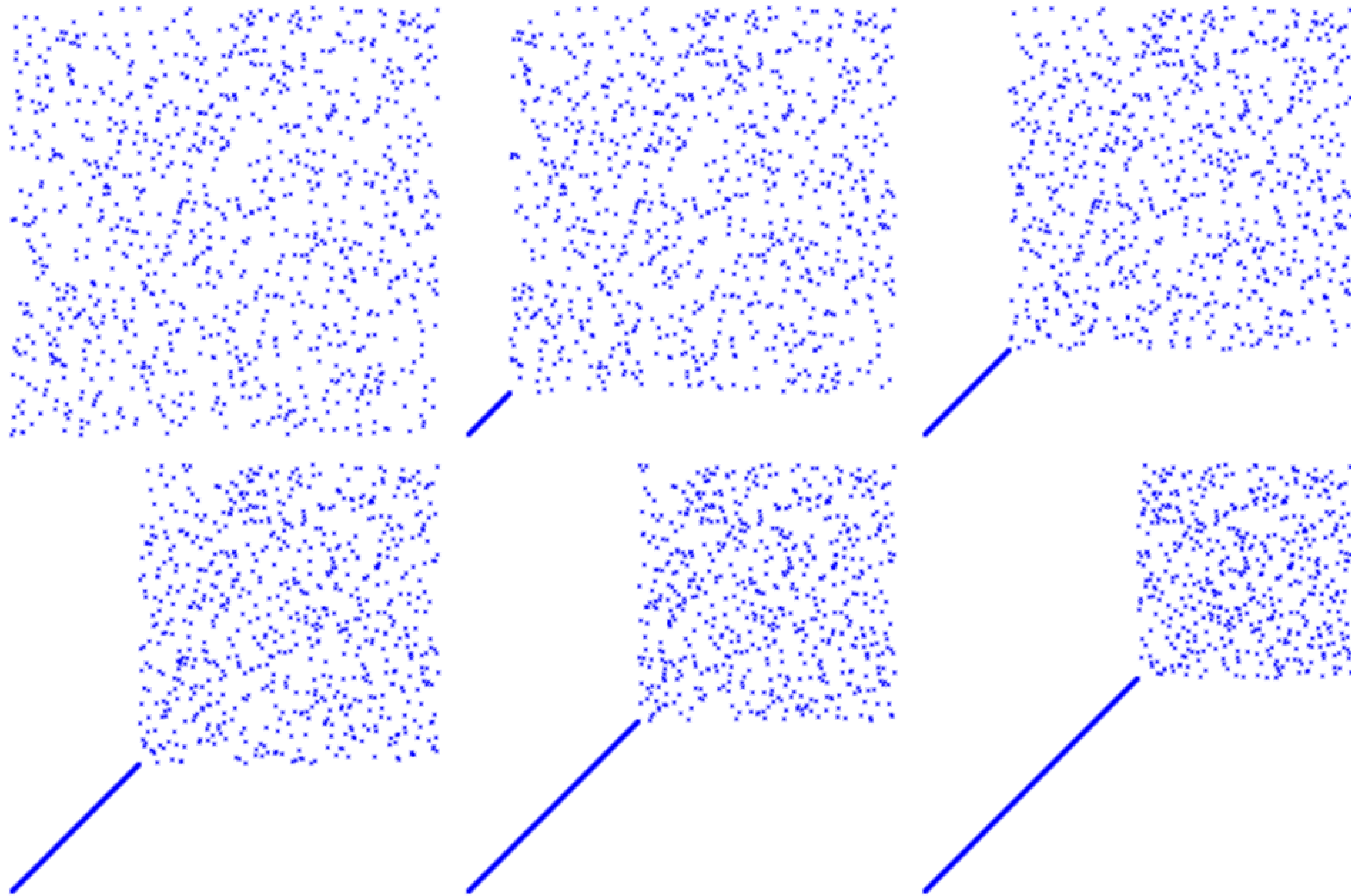
“Visualizzare” il comportamento di un algoritmo di ordinamento

- Consideriamo un vettore A[] contenente tutti e soli gli interi da 1 a N
- Plottiamo i punti di coordinate (i, A[i])





Selection Sort per immagini



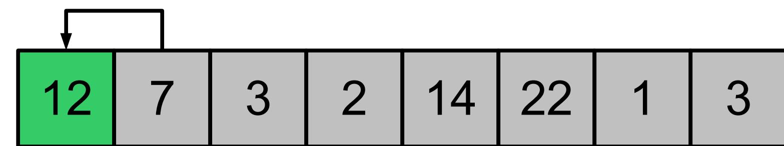
Complessità di Selection Sort

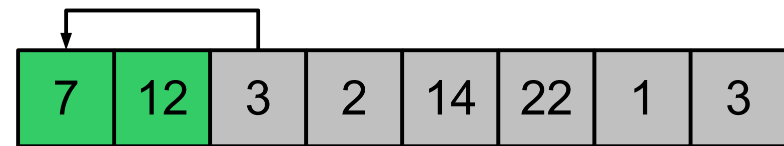
- L'estrazione del i-esimo minimo richiede (*n-i)* confronti (i=1,2, … n-1)
- Non ci sono casi migliori o pessimi!
- Il costo complessivo è quindi

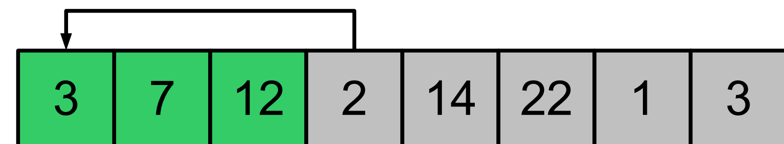
$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\sum_{i=1}^{n-1}n-\sum_{i=1}^{n-1}i=\Theta(n^2)$$

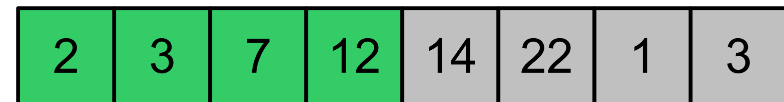
Insertion Sort

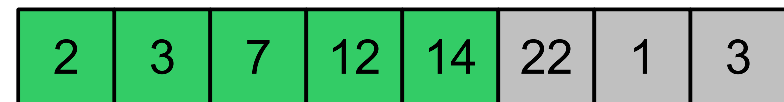
- Idea: al termine del passo k, il vettore ha le prime k componenti ordinate
- Inserisco l'elemento di posizione k+1 nella posizione corretta all'interno dei primi k elementi ordinati

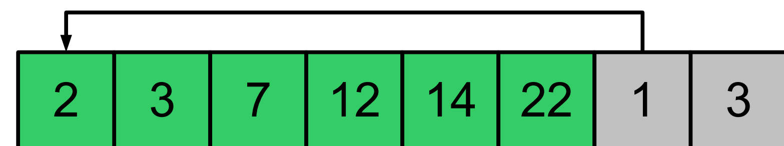


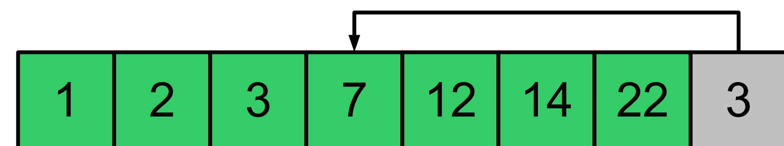


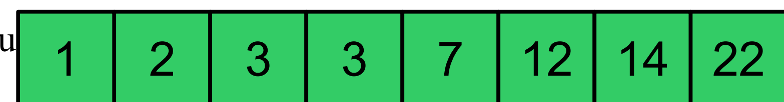












Insertion Sort

```
Algoritmo insertionSort(Array A)
    for i = 2 to A.length do
        key = A[i]
        j = i-1
        while (j > 0) and (A[j] > key) do
            // cerca la posizione j in cui inserire A[i]
            // e sposta A[j..i-1] in A[j+1..i]
            A[j+1] = A[j]
            j = j-1
        // inserisci la nuova chiave in posizione j+1
        A[j+1] = key
```

Domanda: questa implementazione fornisce un ordinamento stabile?

Insertion Sort

- L'inserimento del i-esimo elemento nella posizione corretta rispetto ai primi *(i-1)* elementi richiede *i-1* confronti nel caso peggiore
- Il numero di confronti nel caso peggiore risulta essere quindi

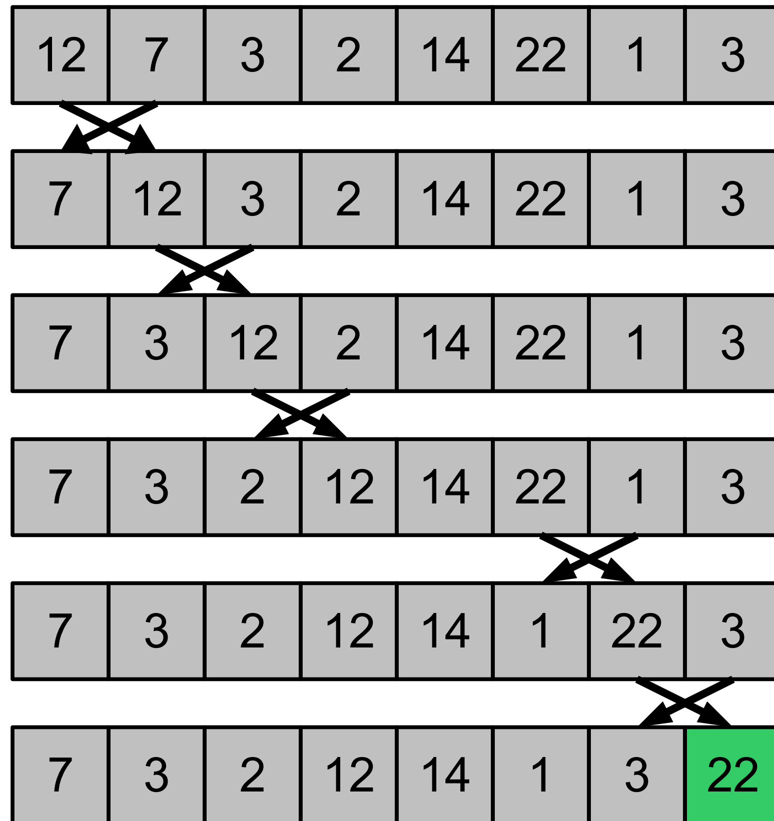
$$\sum_{i=2}^{n}(i-1)=\sum_{j=1}^{n-1} j=\Theta(n^2)$$

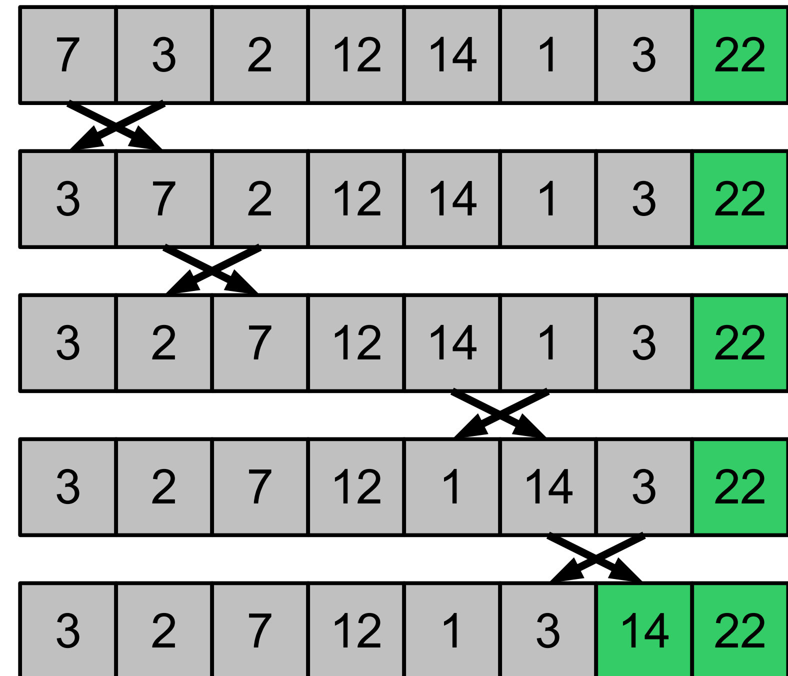
- Caso peggiore: array ordinato in maniera decrescente
- Caso migliore: array ordinato in maniera crescente

Bubble Sort

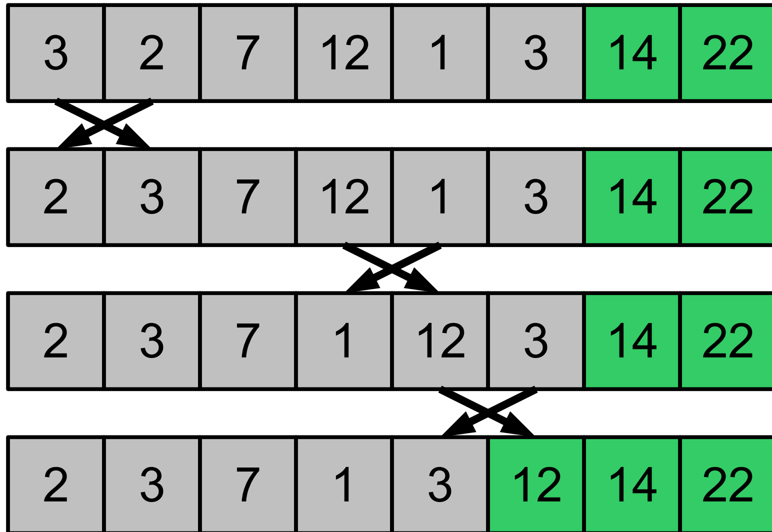
- Esegue una serie di scansioni dell’array
  - Ad ogni scansione scambia le coppie di elementi adiacenti che non sono nell'ordine corretto
  - Se al termine di una scansione non è stato effettuato nessuno scambio, l’array è ordinato
- Dopo la prima scansione, l'elemento massimo occupa l'ultima posizione
- Dopo la seconda scansione, il “secondo massimo” occupa la penultima posizione...
- ...dopo la *i*-esima scansione, gli *i* elementi massimi occupano la posizione corretta in fondo all'array

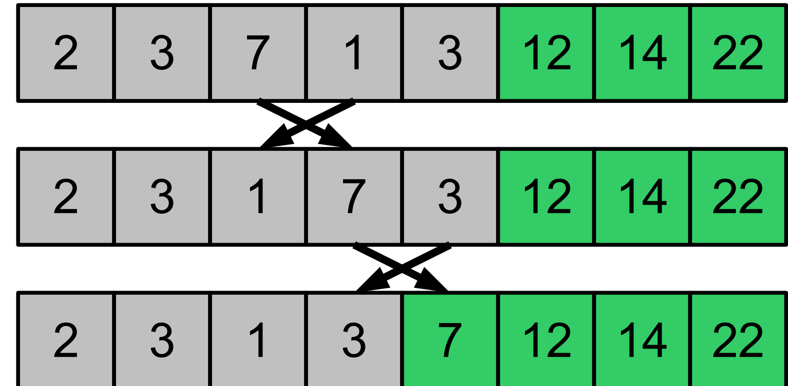
Bubble Sort

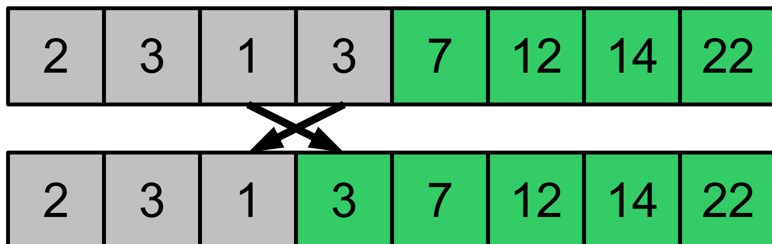


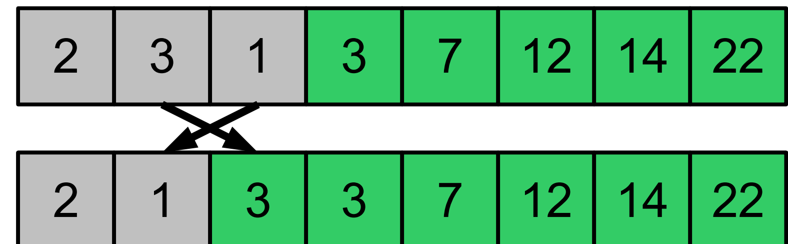


Bubble Sort

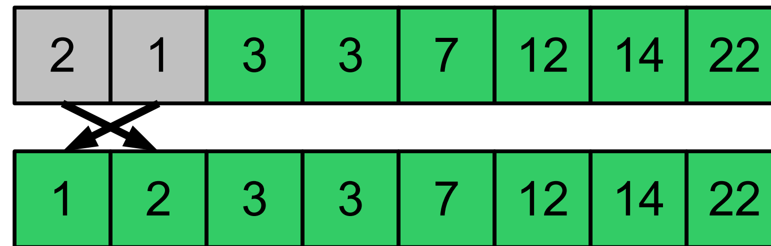








Bubble Sort



Bubble Sort

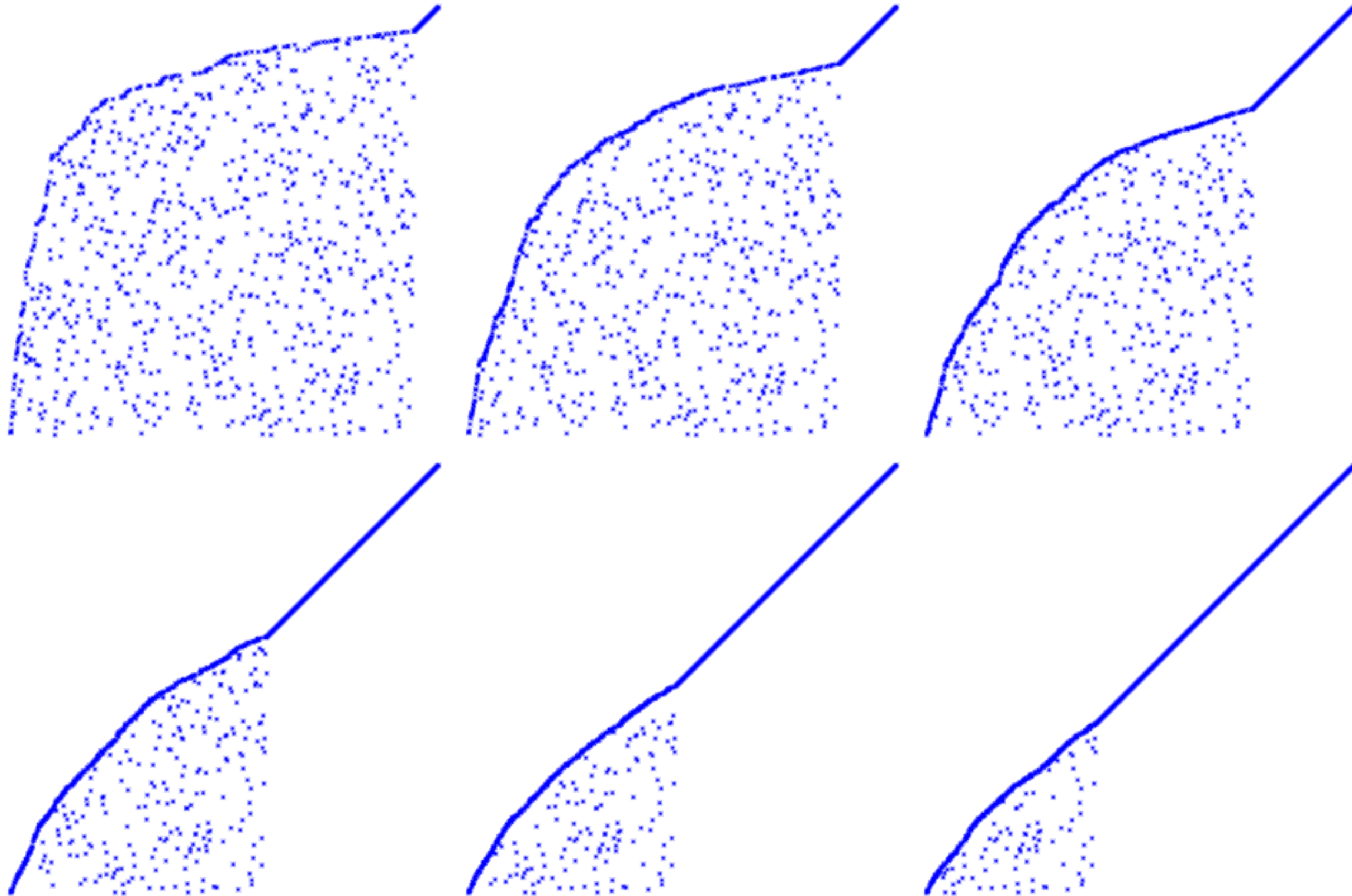
```
algoritmo bubbleSort(Array A)
    for i = 1 to A.length - 1
        scambiAvvenuti = false
        for j = 1 to A.length - i do
            if A[j] > A[j+1] then
                Scambia A[j] con A[j+1]
                scambiAvvenuti = true
        if not scambiAvvenuti then break
```

- Invariante di ciclo: dopo l'i-esima iterazione, gli elementi A[n-i]... A[n] sono correttamente ordinati e occupano la loro posizione definitiva nell'array ordinato

Bubble Sort

- L'algoritmo Bubble Sort ha costo $O(n^2)$
  - Nel caso ottimo l'algoritmo ha costo $\Omega(n)$: effettua una sola scansione dell'array senza effettuare scambi
- In generale, l'algoritmo ha un comportamento “quasi naturale”, nel senso che il tempo di ordinamento tende ad essere legato al grado di “disordine” dell'array
  - La parola chiave è “tende”. Infatti, come si comporta l'algoritmo su questo vettore? [2 3 4 5 6 7 8 9 1]

Bubble Sort per immagini



Si può fare di meglio?

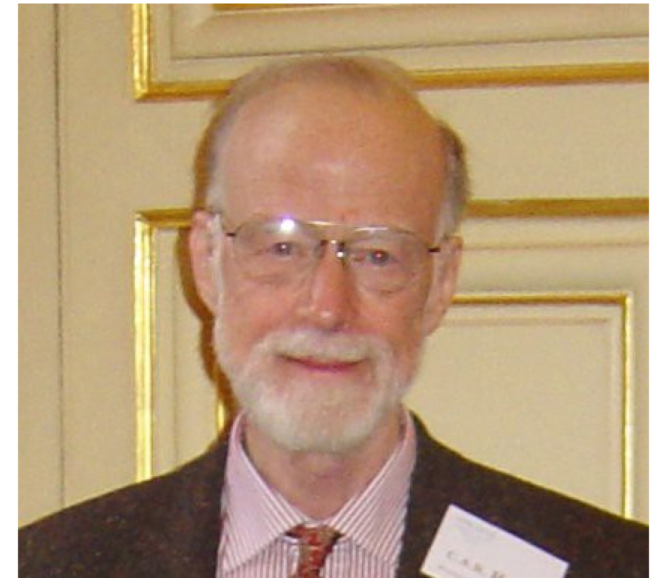
- Gli algoritmi visti fino ad ora hanno costo $O(n^2)$, possono essere resi più efficienti (ad esempio Shell Sort [wiki] che migliora Insertion Sort rendendolo di "passo variabile")
- È possibile fare di meglio, usando tecniche nuove?
  - Quanto meglio?

Algoritmi “divide et impera”

- Idea generale
  - Divide: Scomporre il problema in sottoproblemi dello stesso tipo (cioè sottoproblemi di ordinamento)
  - Risolvere ricorsivamente i sottoproblemi
  - Impera: Combinare le soluzioni parziali per ottenere la soluzione al problema di partenza
- Vedremo due algoritmi di ordinamento di tipo divide et impera
  - Quick Sort
  - Merge Sort

Quick Sort

- Inventato nel 1962 da Sir Charles Anthony Richard Hoare
  - All'epoca *exchange student* presso la Moscow State University
  - Vincitore del *Turing Award* (l'equivalente del Nobel per l'informatica) nel 1980 per il suo contributo nel campo dei linguaggi di programmazione
  - Hoare, C. A. R. *"Quicksort."* Computer Journal 5 (1): 10-15. (1962).



C. A. R. Hoare (1934—)
http://en.wikipedia.org/wiki/C._A._R._Hoare

Quick Sort

- Algoritmo ricorsivo “divide et impera”
  - Scegli un elemento x del vettore v, e partiziona il vettore in due parti considerando gli elementi ≤x e quelli >x
  - Ordina ricorsivamente le due parti
  - Restituisci il risultato concatenando le due parti ordinate
- R. Sedgewick, “*Implementing Quicksort Programs*”, Communications of the ACM, 21(10):847-857, 1978 http://portal.acm.org/citation.cfm?id=359631

Quick Sort

- Input: Array A[1..n], indici i,f tali che $1 \leq i < f \leq n$
- Divide-et-impera
  - Scegli un numero m nell'intervallo [i, i+1, ... f]
  - Divide: permuta l'array A[i..f] in due sottoarray A[i..m-1] e A[m+1..f] (eventualmente vuoti) in modo che:

$$\forall j \in [i \ldots m-1]: A[j] \leq A[m]$$
$$\forall k \in [m+1 \ldots f]: A[m] < A[k]$$

    - A[m] prende il nome di pivot
  - Impera: ordina i due sottoarray A[i..m-1] e A[m+1..f] richiamando ricorsivamente quicksort
  - Combina: non fa nulla; i due sottoarray ordinati e l'elemento A[m] sono già ordinati

Quick Sort

```
Algoritmo quickSort(Array A, indici i,f)
    if (i < f) then
        m = partition(A, i, f)
        quickSort(A, i, m - 1)
        quickSort(A, m+1, f)


// Chiamata iniziale:
// quickSort(A, 1, n)
```

Quick Sort: partition()
Idea di base

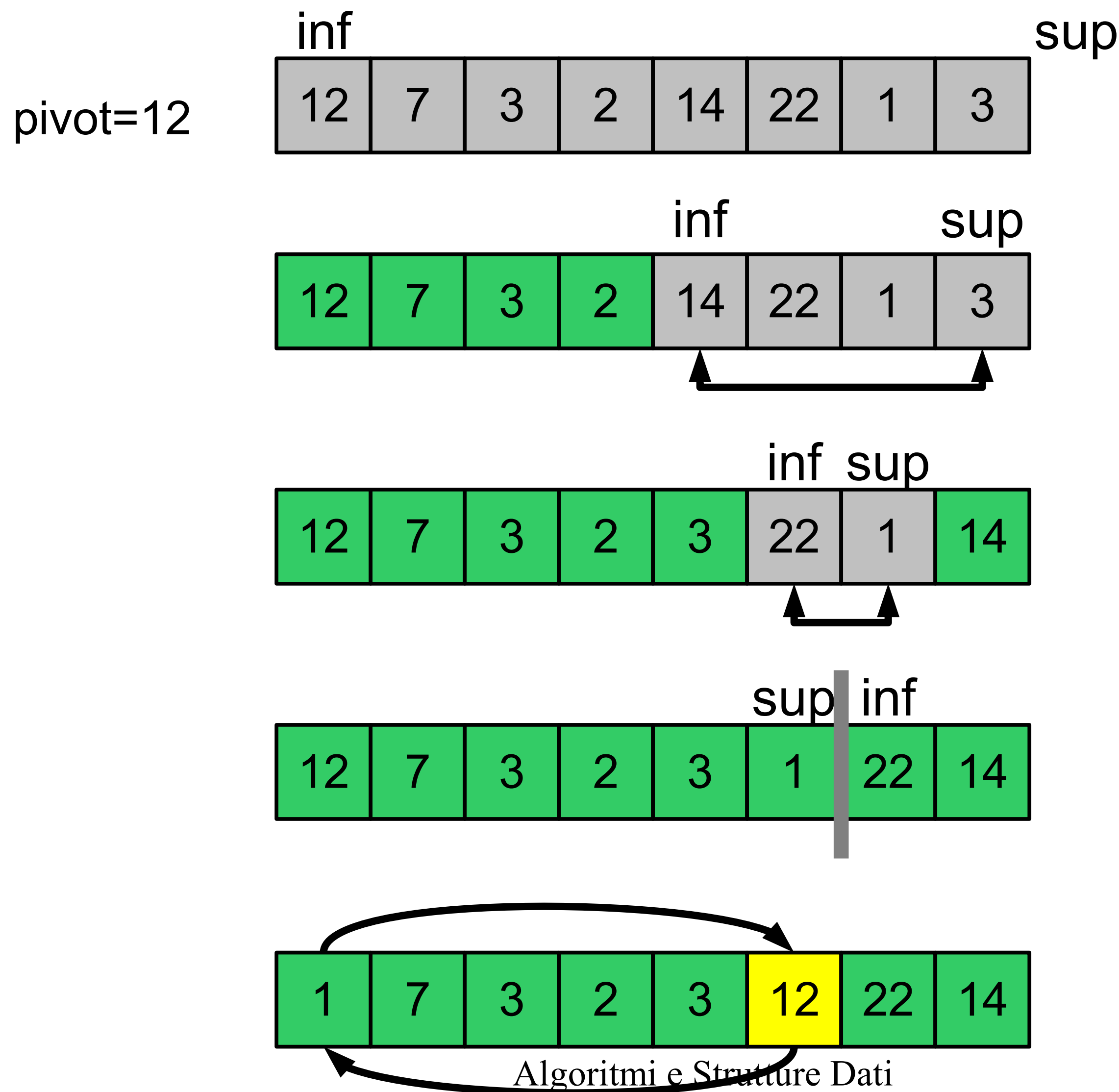
- Manteniamo due indici, inf e sup, che vengono fatti scorrere dalle estremità del vettore verso il centro
  - Il sotto-vettore A[i..inf-1] è composto da elementi ≤ pivot
  - Il sotto-vettore A[sup+1..f] è composto da elementi > pivot
- Quando entrambi (inf e sup) non possono essere fatti avanzare verso il centro, si scambia A[inf] e A[sup]

Quick Sort: partition()

Scelta deterministica del pivot

```
funzione partition(Array A, indici i,f) ---> indice
    x = A[i]
    inf = i
    sup = f
    while (inf < sup) do
        while (inf <= f && A[inf] <= x) do
            inf++
        while (A[sup] > x) do
            sup--
        if (inf < sup) then
            scambia A[inf] con A[sup]
    scambia A[i] con A[sup]
    return sup
```

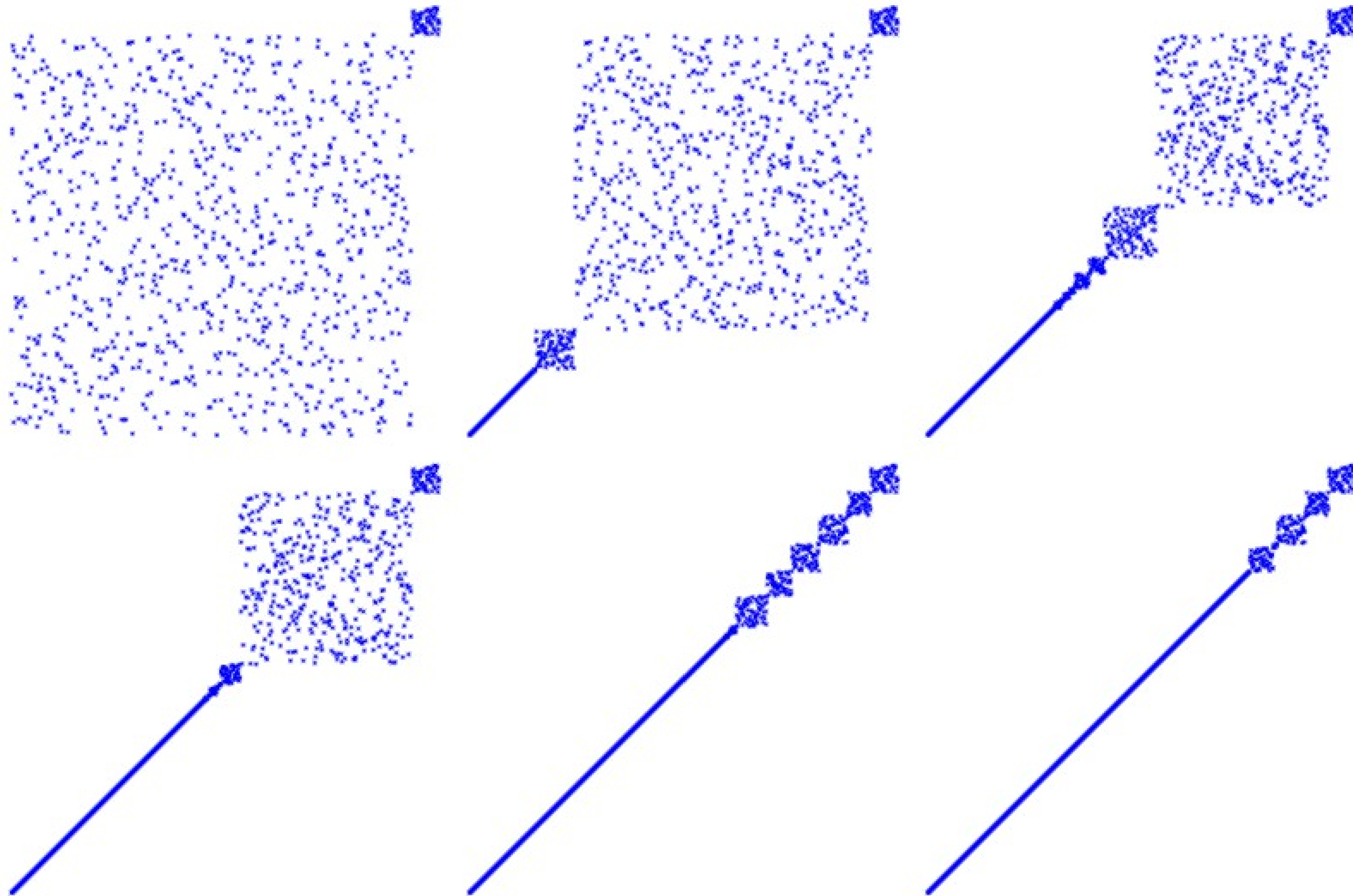
Esempio di partizionamento



Esercizio
(problema 4.7 del libro di testo)

- Il problema della bandiera nazionale. Supponiamo di avere un array A[1..n] di elementi che possono assumere solo tre valori: bianco, verde e rosso. Ordinare l'array in modo che tutti gli elementi verdi siano a sinistra, quelli bianchi al centro e quelli rossi a destra.
- L'algoritmo DEVE richiedere tempo O(n) e memoria aggiuntiva O(1). Può confrontare ed eventualmente scambiare tra loro elementi, e NON DEVE fare uso di ulteriori array di appoggio, né usare contatori per tenere traccia del numero di elementi di un certo colore
- Si PUO' risolvere con una singola scansione dell'array.

Quick Sort per immagini



Quick Sort: Analisi del costo

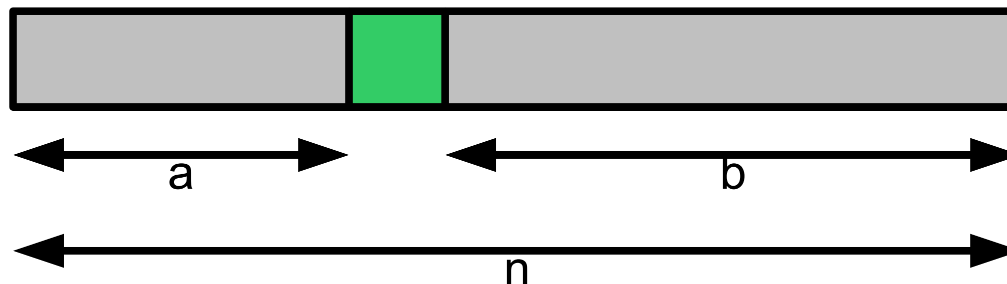
- Costo di partition(): $\Theta(f-i)$
- Costo Quick Sort: Dipende dal partizionamento
- Partizionamento peggiore
  - Dato un problema di dimensione n, viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione 0 e n-1
  - $T(n) = T(n-1)+T(0)+\Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n) = \Theta(n^2)$
- **Domanda**: Quando si verifica il caso pessimo?
- Partizionamento migliore
  - Data un problema di dimensione n, viene sempre diviso in due sottoproblemi di dimensione n/2
  - $T(n) = 2T(n/2)+\Theta(n) = \Theta(n \log n)$ (caso 2 Master Theorem)

QuickSort: Analisi nel caso medio

- In generale, possiamo scrivere la relazione di ricorrenza per T(n)—che esprime il numero di confronti richiesti—come segue:

$$T(n) = T(a) + T(b) + n-1$$

con $(a+b)=(n-1)$



- Il problema è che a e b cambiano (potenzialmente) ad ogni iterazione

QuickSort: Analisi nel caso medio

- Assumendo che tutti i partizionamenti siano equiprobabili, possiamo scrivere:

$$T(n) = \sum_{a=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(n-1+T(a)+T(n-a-1)\right)$$

- Osserviamo che i termini T(a) e T(n-a-1) danno luogo alla stessa sommatoria, da cui possiamo semplificare

$$T(n) = n-1+\frac{2}{n}\sum_{a=0}^{n-1} T(a)$$

QuickSort: Analisi nel caso medio

- Teorema: la relazione di ricorrenza

$$T(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{a=0}^{n-1} T(a)$$

  ha soluzione $T(n) \leq 2n \ln n$
- Dimostrazione: verifichiamo per sostituzione che la soluzione $T(n)$ verifica la relazione $T(n) \leq \alpha\, n \ln n$
  - Verificheremo che si avrà $\alpha=2$

QuickSort: Analisi nel caso medio

$$T(n) = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T(i)$$

$$\le n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \alpha\, i \ln i$$

$$= n - 1 + \frac{2\alpha}{n}\sum_{i=2}^{n-1} i \ln i$$

$$\le n - 1 + \frac{2\alpha}{n}\int_{2}^{n} x \ln x \, dx$$

continua...

QuickSort: Analisi nel caso medio

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

$$T(n) \le n - 1 + \frac{2\alpha}{n}\int_2^n x \ln x\, dx$$

$$= n - 1 + \frac{2\alpha}{n}\left(\frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4} - 2\ln 2 + 1\right)$$

$$= n - 1 + \alpha n \ln n - \alpha \frac{n}{2} - O(1)$$

$$\le \alpha n \ln n$$

- L'ultima disuguaglianza vale per α≥2 (e per valori sufficientemente grandi di *n*), da cui la tesi è dimostrata

Quick Sort: Versione randomizzata

- La scelta del pivot nell'operazione partition() è cruciale per evitare che si presenti il caso pessimo
- Abbiamo visto una implementazione in cui il pivot è sempre il primo elemento del (sotto-)vettore
  - In questa situazione è abbastanza facile costruire esempi in cui si verifica il caso pessimo
- Possiamo ridurre la probabilità che si verifichi il caso pessimo mediante randomizzazione
  - Scegliamo in maniera pseudocasuale il pivot tra tutti gli elementi del (sotto-)vettore

Quick Sort: partition() probabilistica

Scelta non-deterministica del pivot

```
funzione partition(Array A, indici i,f) ---> indice
    scegli a caso un indice m compreso tra i ed f
    scambia A[i] con A[m]
    // esegui partition() come prima
    x = A[i]
    inf = i
    sup = f
    while (inf < sup) do
        while (inf <= f && A[inf] <= x) do
            inf++
        while (A[sup] > x) do
            sup--
        if (inf < sup) then
            scambia A[inf] con A[sup]
    scambia A[i] con A[sup]
    return sup
```

Merge Sort

- Inventato da John von Neumann nel 1945
- Algoritmo *divide et impera*
- Idea:
  - Dividere A[] in due meta' A1[] e A2[] (senza permutare) di dimensioni uguali;
  - Applicare ricorsivamente Merge Sort a A1[] e A2[]
  - Fondere (*merge*) gli array ordinati A1[] e A2[] per ottenere l'array A[] ordinato

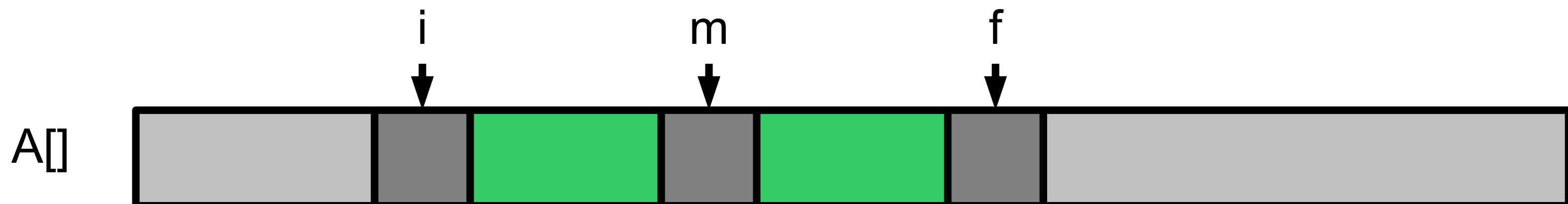
John von Neumann (1903—1957)
http://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann

Merge Sort vs Quick Sort

- Quick Sort:
  - partizionamento complesso, merge banale (di fatto nessuna operazione di merge è richiesta)
- Merge Sort:
  - partizionamento banale, operazione merge complessa

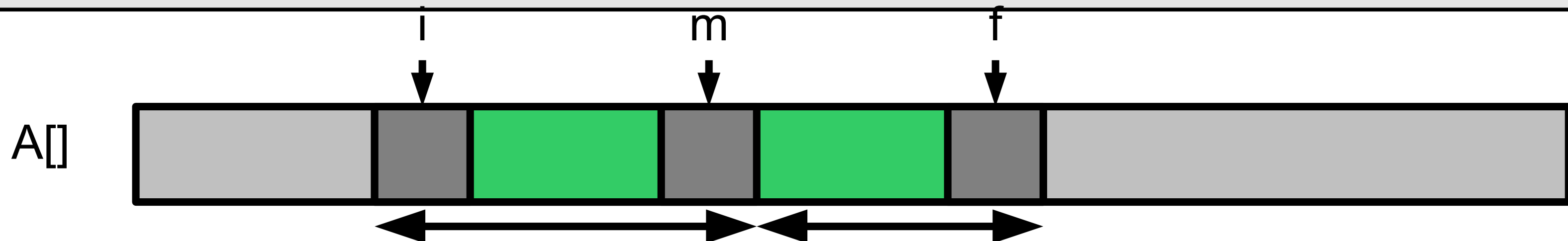
Merge Sort

```
algoritmo mergeSort(Array A, indici i,f)
   if (i < f) then
      m = (i + f) / 2 // parte bassa
      mergeSort(A, i, m)          // ordina A[i..m]
      mergeSort(A, m + 1, f)      // ordina A[m+1..f]
      merge(A, i, m, f)


// Chiamata iniziale:
// mergeSort(A, 1, n)
```

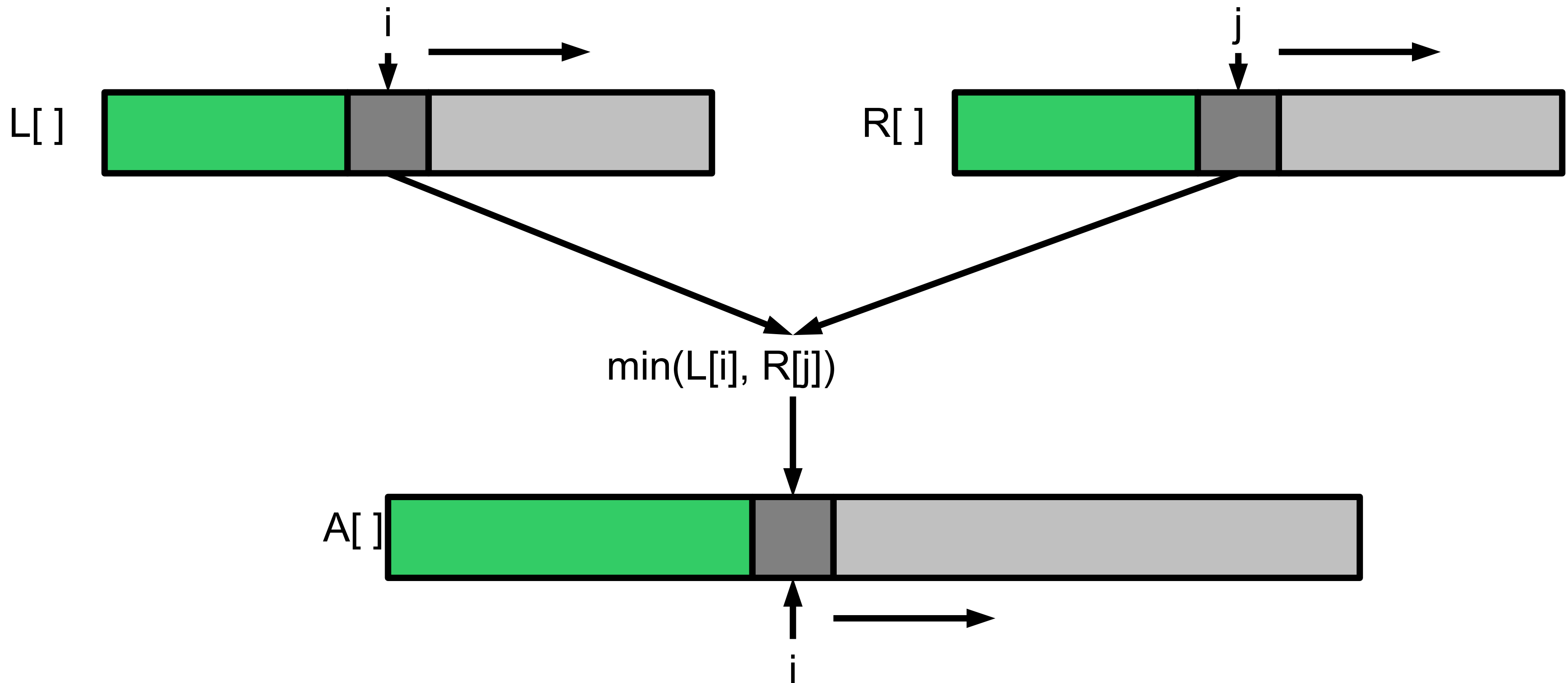


Procedura merge()

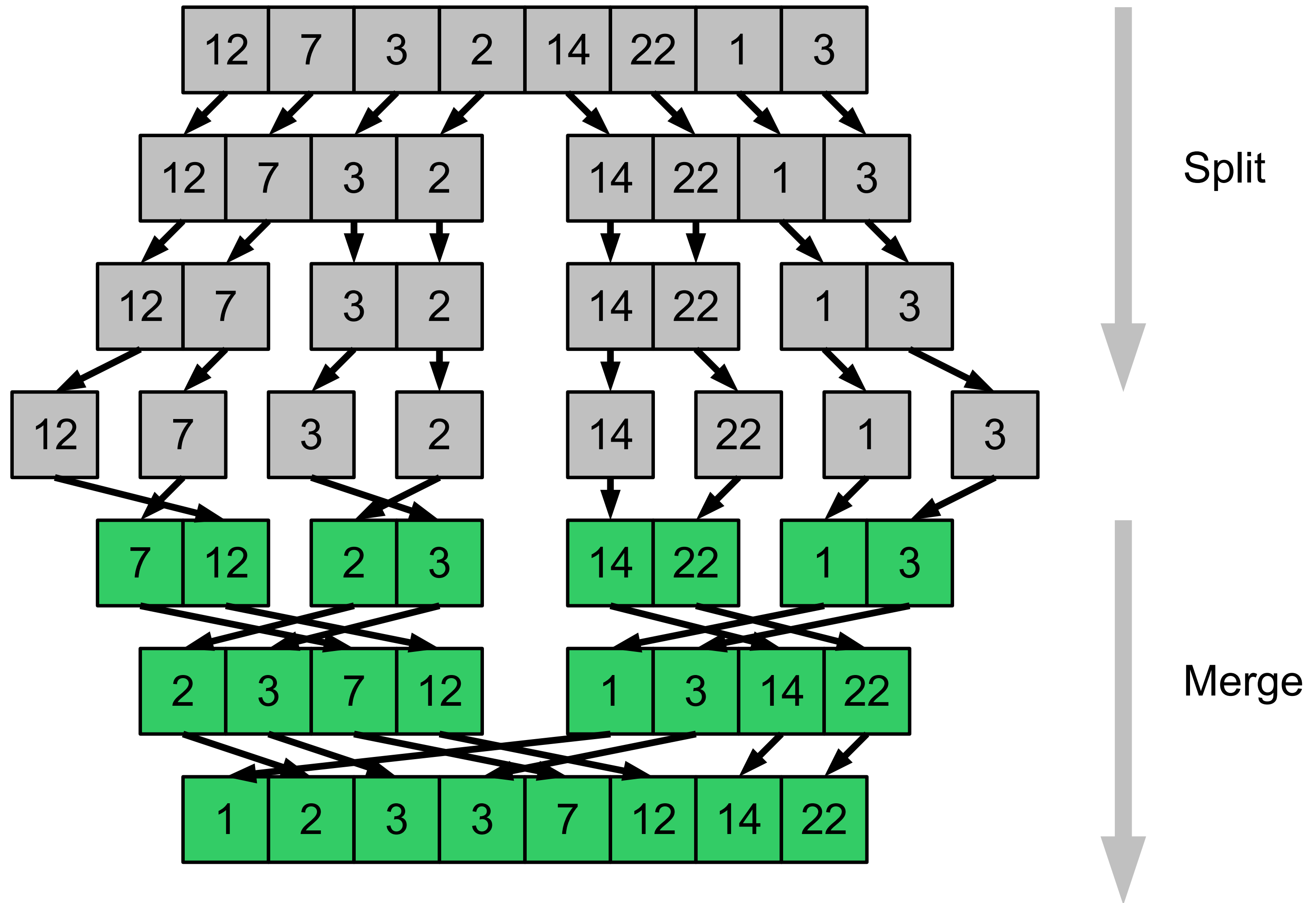
```
PRE:  A[i..m] e A[m+1..f] ordinati
POST: A[i..f] ordinato

procedura merge(Array A[], int i, int m, int f)
    n1 = m - i + 1 // dimensione di A[i..m]
    n2 = f - m      // dimensione di A[m+1..f]
    crea gli Array L[1..n1+1] e R[1..n2+1]
    copia A[i..m] in L[1..n1]
    copia A[m+1..f] in R[1..n2]
    L[n1+1] = R[n2+1] = Max
    i = j = 1
    for k = i to f do
        if L[i] <= R[j] then
            A[k] = L[i]
            i++
        else
            A[k] = R[j]
            j++
```



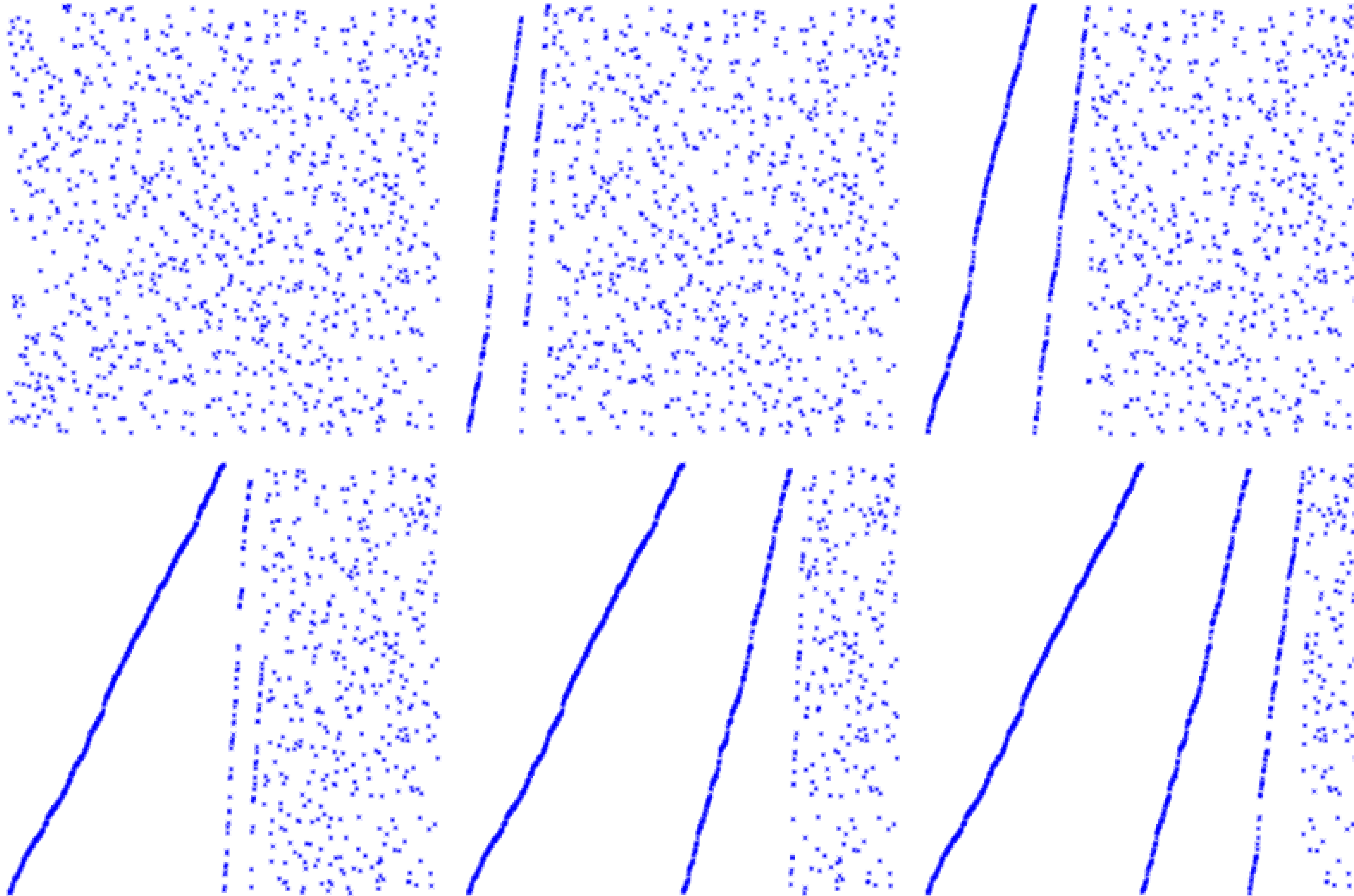
Operazione merge()



Merge Sort: esempio



Merge Sort per immagini



Merge Sort: complessità

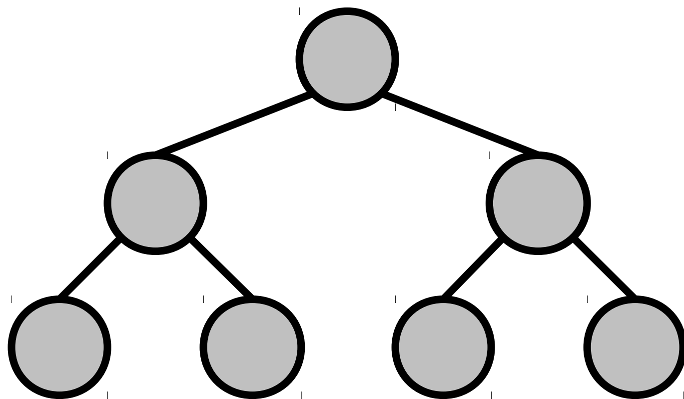
- $T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$
- In base al Master Theorem (caso 2), si ha
  $$T(n) = \Theta(n \log n)$$
- La complessità di Merge Sort non dipende dalla configurazione iniziale dell'array da ordinare
  - Quindi il limite di cui sopra vale nei casi ottimo/pessimo/medio
- Svantaggi rispetto a Quick Sort: Merge Sort richiede ulteriore spazio (non ordina in-place)
  - Jyrki Katajainen, Tomi Pasanen, Jukka Teuhola, "*Practical in-place mergesort*", http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.8523

Heapsort

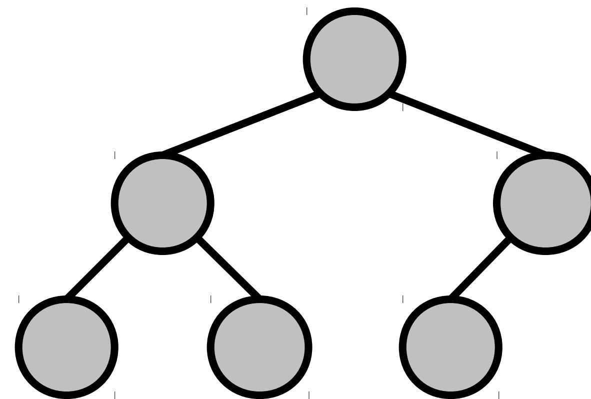
- L'idea
  - Utilizzare una struttura dati—detta heap—per ordinare un array
  - Costo computazionale: O(n log n)
  - Ordinamento sul posto
- Inoltre
  - Il concetto di heap può essere utilizzato per implementare code con priorità

Alberi binari

- Albero binario perfetto
  - Tutte le foglie hanno la stessa altezza h
  - Nodi interni hanno grado 2
- Un albero perfetto
  - Ha altezza $h \approx \log N$
  - $N = \#nodi = 2^{h+1}-1$

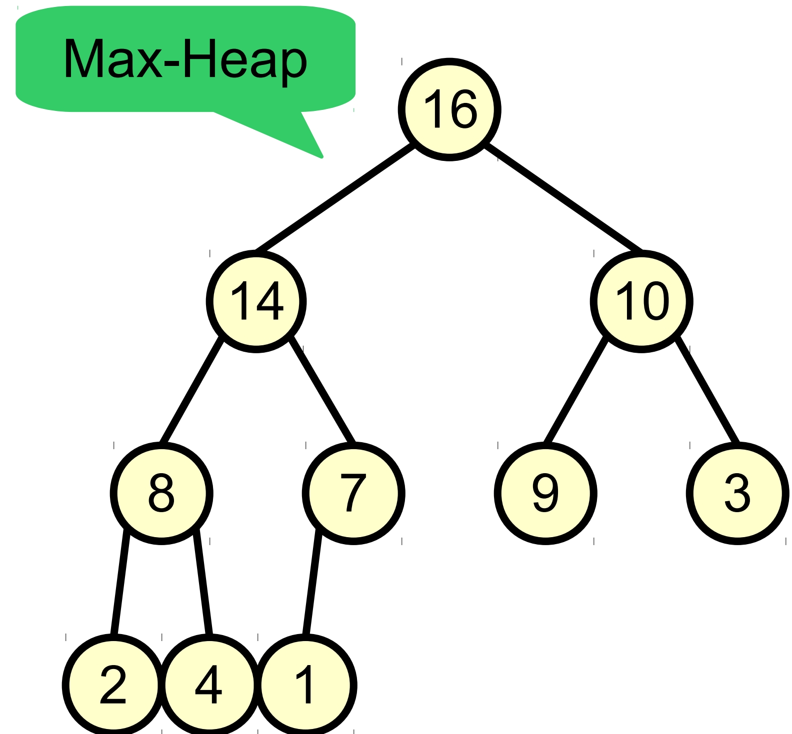


- Albero binario completo
  - Tutte le foglie hanno profondità h o h-1
  - Tutti i nodi a livello h sono "accatastati" a sinistra
  - Tutti i nodi interni hanno grado 2, eccetto al più uno



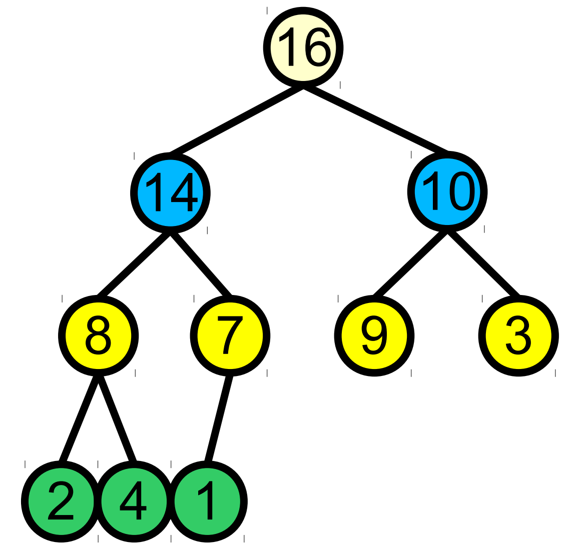
Alberi binari heap

- Un albero binario completo è un albero max-heap sse
  - Ad ogni nodo i viene associato un valore A[i]
  - A[Parent(i)] ≥ A[i]
- Un albero binario completo è un albero min-heap sse
  - Ad ogni nodo i viene associato un valore A[i]
  - A[Parent(i)] ≤ A[i]
- Ovviamente, le definizioni e gli algoritmi di max-heap sono simmetrici rispetto a min-heap



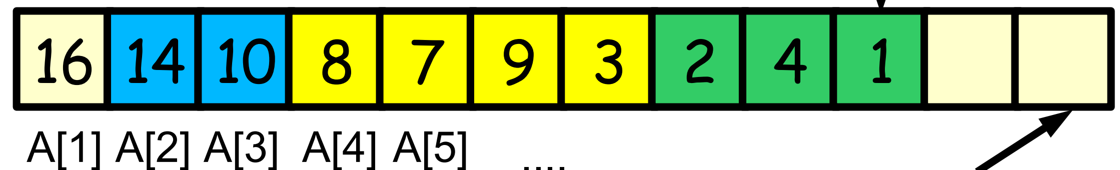
Array heap

- E' possibile rappresentare un albero binario heap tramite un array heap (oltre che tramite puntatori)
- Cosa contiene?
  - Array A, di lunghezza A.length
  - Dimensione A.heapsize ≤ A.length
- Come è organizzato?
  - A[1] contiene la radice
  - Parent(i) = Math.floor(i/2)
  - Left(i) = 2*i
  - Right(i) = 2*i+1



Domanda: Gli elementi dell'albero heap compaiono nel vettore nello stesso ordine della visita ...

A.heapsize=10



A.length = 12

Operazioni su array heap

- findMax(): Individua il valore massimo contenuto in uno uno heap
  - Il massimo è sempre la radice, ossia A[1]
  - L'operazione ha costo O(1)
- fixHeap(): Ripristinare la proprietà di max-heap
  - Supponiamo di rimpiazzare la radice A[1] di un max-heap con un valore qualsiasi
  - Vogliamo fare in modo che A[] diventi nuovamente uno heap
- heapify(): Costruire uno heap a partire da un array privo di alcun ordine
- deleteMax(): rimuovi l'elemento massimo da un max-heap A[]

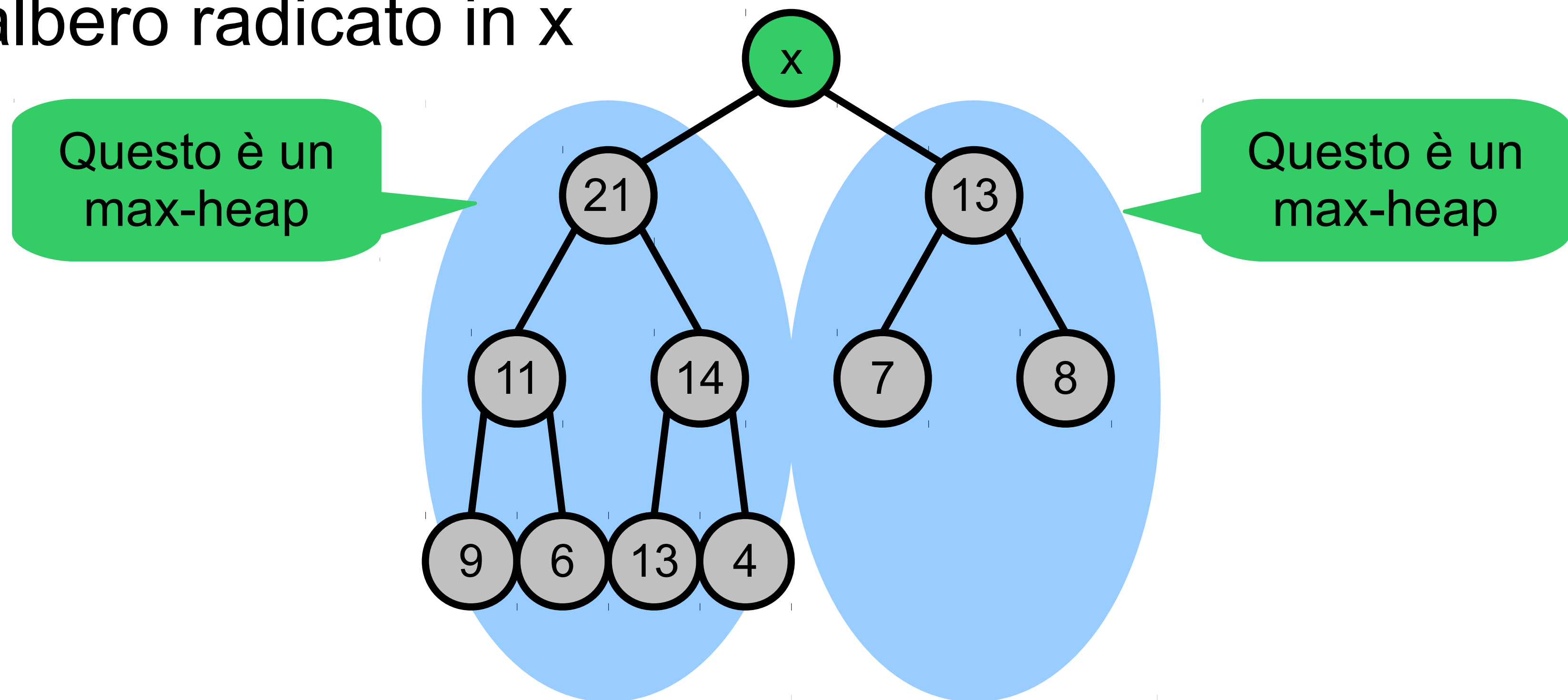
Operazione heapify()

- Parametri:
  - S[] è un array (arbitrario); assumiamo che lo heap abbia n elementi S[1], ... S[n]
  - i è l'indice dell'elemento che diventerà la radice dello heap ($i \geq 1$)
  - n indica l'indice dell'ultimo elemento dello heap

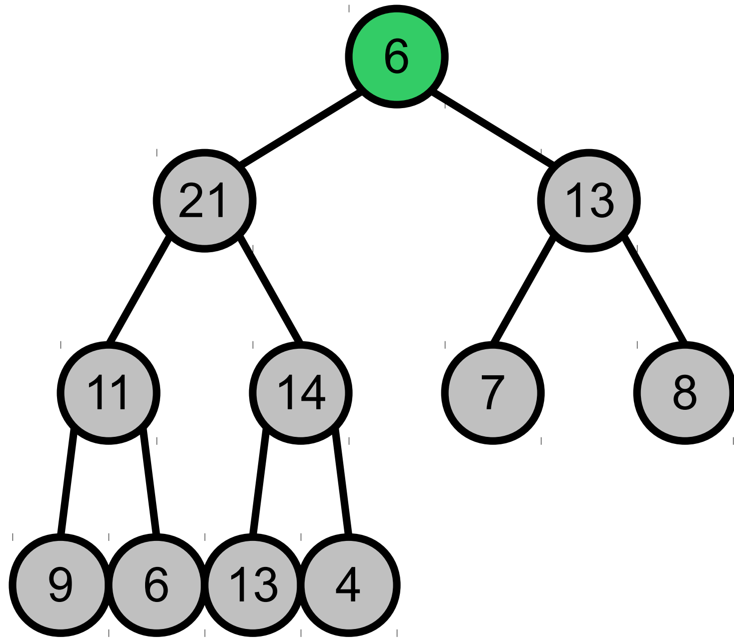
```
procedura heapify(Array S, indici n, i)
    if (i > n) then return
    heapify(S, n, 2 * i) // crea heap radicato in S[2*i]
    heapify(S, n, 2 * i + 1) // crea heap radicato in S[2*i+1]
    fixHeap(S, n, i)

// per trasformare un array S in uno heap:
// heapify(S, S.length, 1 )
```

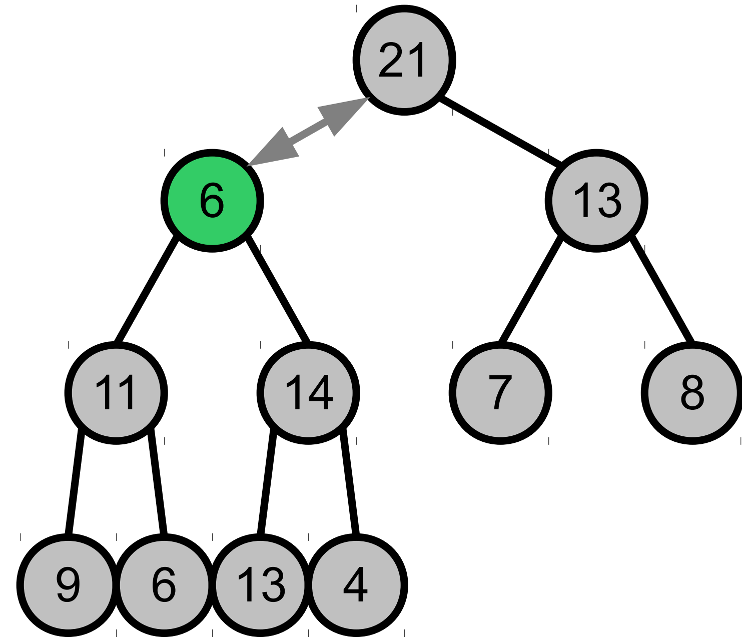
Operazione fixHeap()

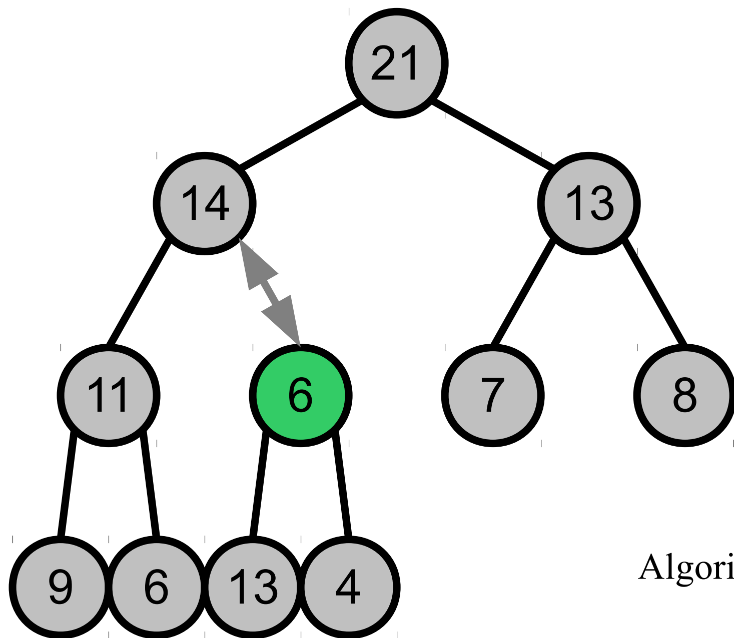
- Supponiamo di avere trasformato in max-heap i sottoalberi destro e sinistro di un nodo x
- L'operazione fixHeap() trasforma in max-heap l'intero albero radicato in x

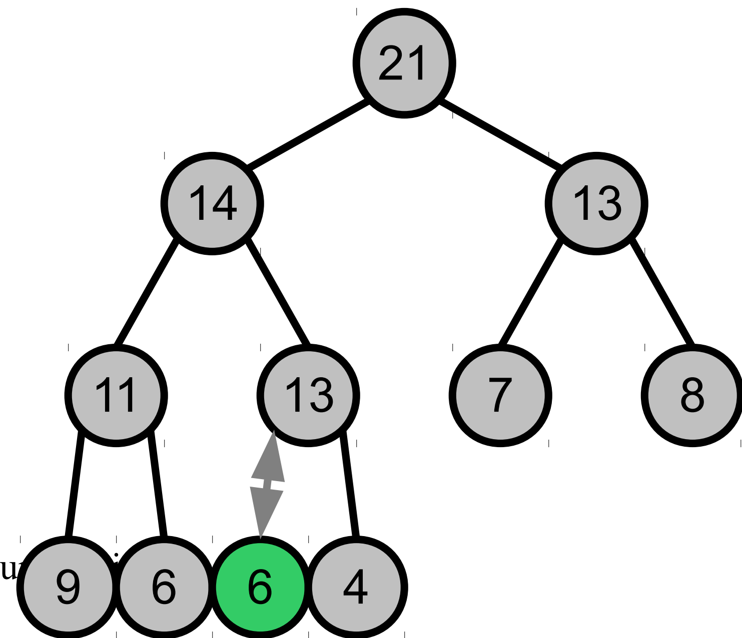


Operazione fixHeap()









Operazione fixHeap()

- Ripristina la proprietà di ordinamento di uno max-heap rispetto ad un nodo radice di indice i.
- Si confronta ricorsivamente S[i] con il massimo tra i suoi figli e si opera uno scambio ogni volta che la proprietà di ordinamento non è verificata.

```
procedura fixHeap(Array S, indici c, i)
    max = 2 * i // figlio sinistro
    if (2 * i > c) then return
    if (2 * i + 1 <= c && S[2 * i] < S[2 * i + 1]) then
        max = 2 * i + 1 // figlio destro
    if (S[i] < S[max])
        Scambia S[max] con S[i]
        fixHeap(S, c, max)
```

c è l'indice dell'ultimo elemento dello heap

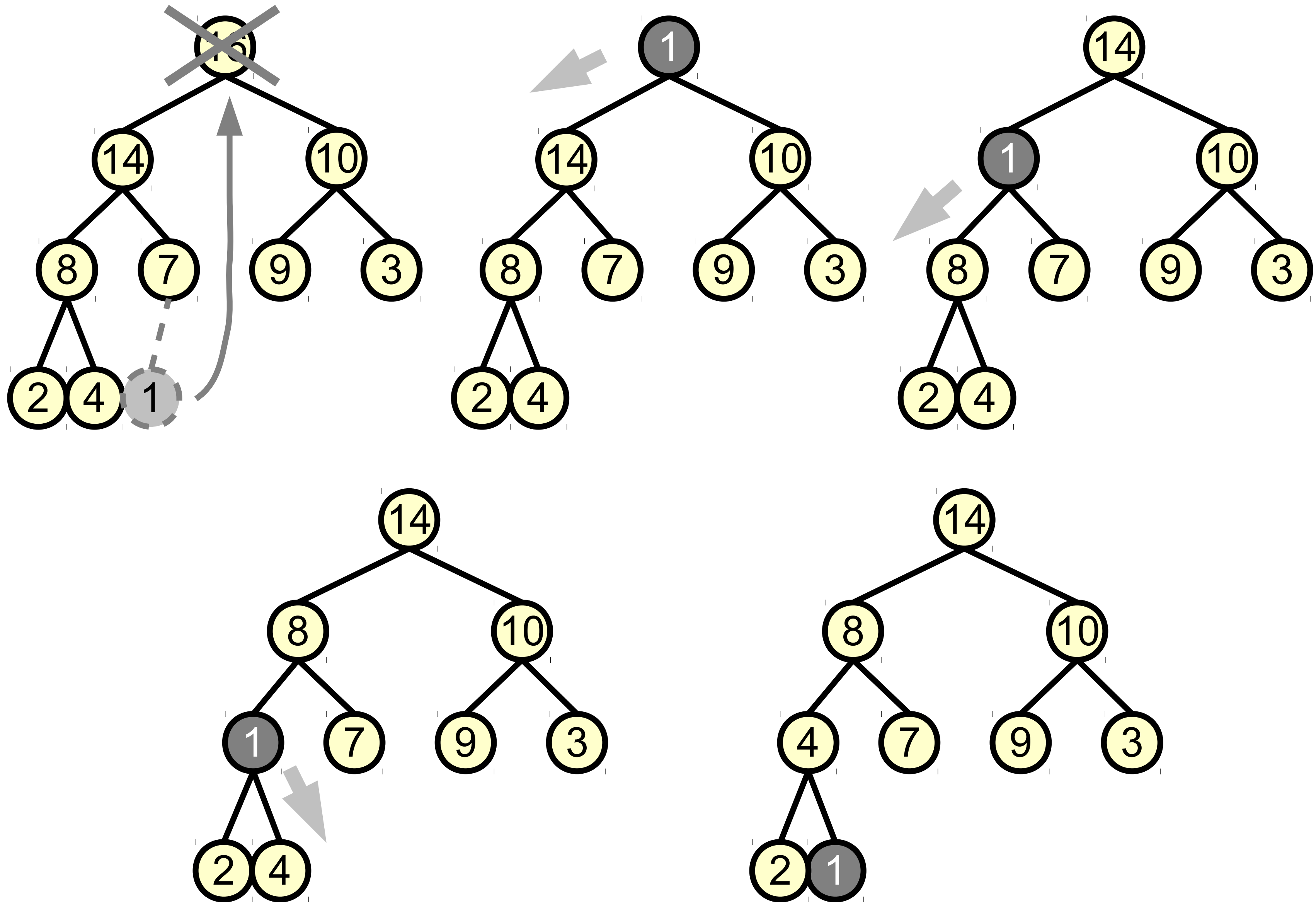
operazione deleteMax()

- Scopo: rimuove la radice (cioè il valore massimo) dallo heap, mantenendo la proprietà di max-heap
- Idea
  - al posto del vecchio valore A[1] metto il valore presente nell'ultima posizione dell'array heap
  - applico fixHeap() per ripristinare la proprietà di heap

```
procedura deleteMax(Array S, indice c)
    Scambia S[1] con S[c]
    S.heapsize--
    fixHeap(S, c, 1)
```

c è l'indice dell'ultimo elemento dello heap

Esempio



Costo computazionale

- fixHeap()
  - Nel caso pessimo, il numero di scambi è uguale alla profondità dello heap
  - Cioè O(log n)
- heapify()
  - T(n) = 2T(n/2) + O(log n)
  - da cui T(n) = O(n) (caso (1) del Master Theorem)
- findMax()
  - O(1)
- deleteMax()
  - la stessa di fixHeap(), ossia O(log n)

Heap Sort

- Idea:
  1. Costruire un max-heap a partire dal vettore A[] originale, mediante l'operazione heapify()
  2. Estrarre il massimo (findMax() + deleteMax())
     - Lo heap si contrae di un elemento
  3. Inserire il massimo in ultima posizione di A[]
  4. Ripetere il punto 2. finché lo heap diventa vuoto

Heap Sort

O(n)

O(1)

O(log n)

```
Algoritmo heapSort(Array S)
    heapify(S, S.length, 1)
    for c = S.length downto 2
        Scambia S[1] con S[c]
        S.heapsize--
        fixHeap(S, S.heapsize, 1)
```

- Costo computazionale:
  - O(n) per heapify() iniziale
  - Ciascuna iterazione del ciclo 'for' costa O(log c)
- Totale:

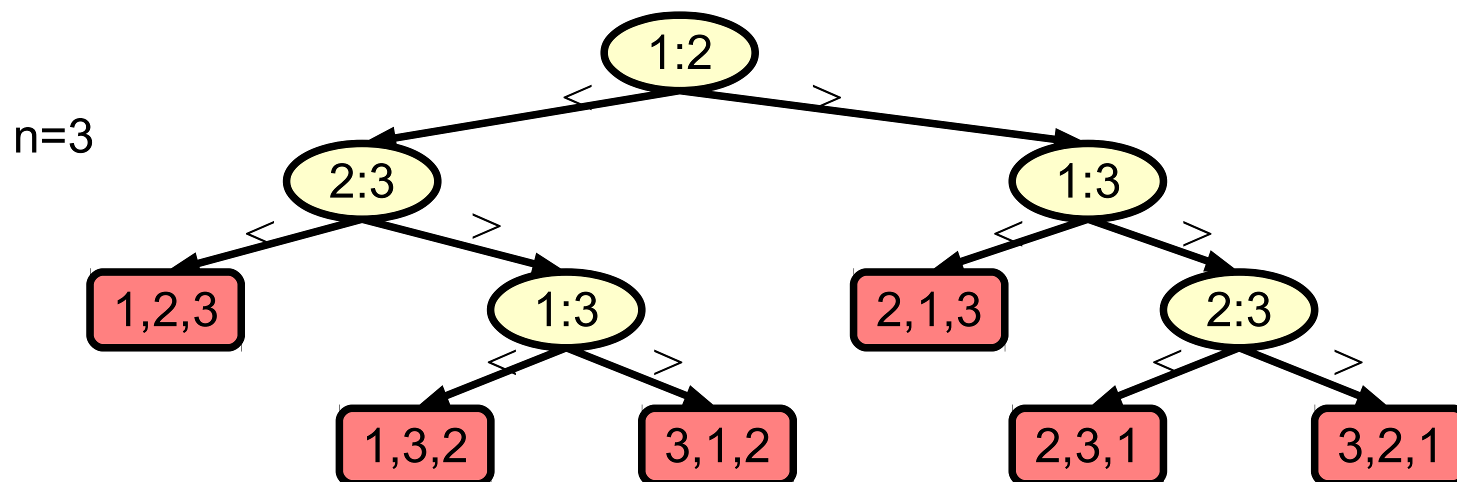
$$T(n) = O(n) + O\left(\sum_{c=n}^{1} \log c\right) = O(n \log n)$$

Algoritmi di ordinamento: sommario

- Abbiamo visto diversi algoritmi di ordinamento:
  - Selection Sort: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n^2)$
  - Insertion Sort: ottimo $\Theta(n)$, medio/pessimo $\Theta(n^2)$
  - Merge Sort: ottimo/medio/pessimo $\Theta(n \log n)$
  - Heap Sort: $O(n \log n)$
  - Quick Sort: ottimo/medio $O(n \log n)$, pessimo $O(n^2)$
- Nota:
  - Tutti questi algoritmi sono basati su confronti
    - le decisioni sull'ordinamento vengono prese in base al confronto (<,=,>) fra due valori
- Domanda
  - È possibile fare meglio di $O(n \log n)$?

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Assunzioni
  - Consideriamo un qualunque algoritmo X basato su confronti
  - Assumiamo che tutti i valori siano distinti
- L'algoritmo X
  - può essere rappresentato tramite un albero di decisione, un albero binario che rappresenta i confronti fra gli elementi



Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Idea
  - Ogni algoritmo basato su confronti può essere sempre descritto tramite un albero di decisione
  - Ogni albero di decisione può essere interpretato come un algoritmo di ordinamento
- Proprietà
  - Cammino radice-foglia in un albero di decisione: *sequenza di confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente*
  - Altezza dell'albero di decisione: *# confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente nel caso pessimo*
  - Altezza media dell'albero di decisione: *# confronti eseguiti dall'algoritmo corrispondente nel caso medio*

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

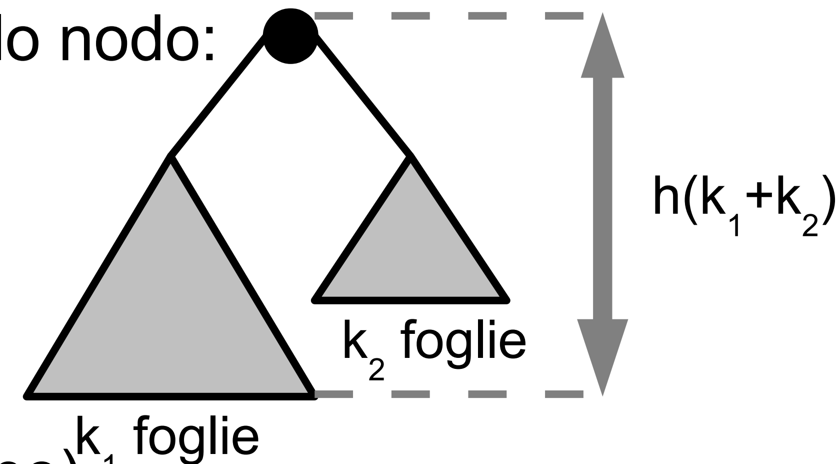
- Lemma 1
  - Un albero di decisione per l'ordinamento di n elementi contiene almeno n! foglie
- Dimostrazione
  - Ogni foglia corrisponde ad una possibile soluzione del problema dell'ordinamento
  - Una soluzione del problema dell'ordinamento consiste in una permutazione dei valori di input
  - Ci sono n! possibili permutazioni

Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Lemma 2
  - Sia T un albero binario in cui ogni nodo interno ha esattamente 2 figli e sia k il numero delle sue foglie. L'altezza dell'albero è almeno $\log_2 k$
- Dimostrazione (per induzione strutturale)
  - Consideriamo un albero con un solo nodo: $h(1) = 0 \geq \log_2 1 = 0$
  - Passo induttivo

$$
\begin{aligned}
h(k_1+k_2) &= 1 + \max\{ h(k_1), h(k_2) \} \\
&\geq 1 + h(k_1) \\
&\geq 1 + \log_2 k_1 \text{ (per induzione)} \\
&= \log_2 2 + \log_2 k_1 = \log_2 (2k_1) \geq \log_2 (k_1 + k_2)
\end{aligned}
$$

Supponiamo $k_1>k_2$



Limite inferiore alla complessità del problema dell'ordinamento

- Teorema
  - Il numero di confronti necessari per ordinare n elementi nel caso peggiore è *Ω(n log n)*
  - **Domanda:** Dimostrazione
  - **Suggerimenti:**
    - Ogni algoritmo basato su confronti richiede tempo proporzionale all'altezza dell'albero di decisione
    - L'albero di decisione ha n! foglie
    - Un albero di decisione con n! foglie ha altezza Ω(log n!)
    - Utilizzare l'approssimazione di Stirling del fattoriale:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

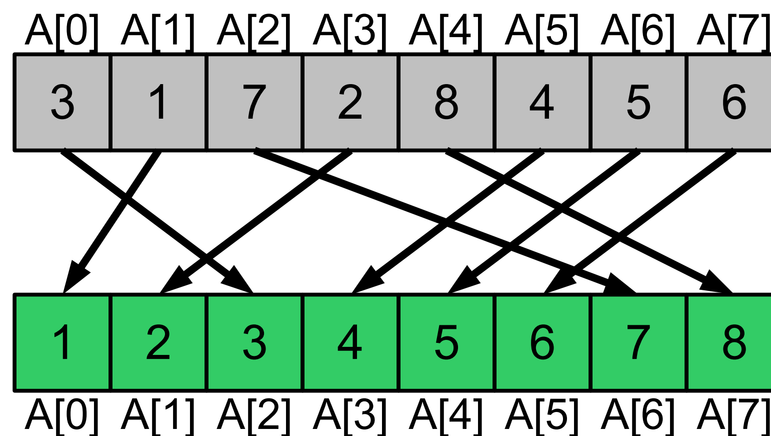
Ordinare in tempo lineare

Tecniche lineari di ordinamento

- Una considerazione
  - Il limite inferiore sull'ordinamento si applica solo agli algoritmi basati su confronti
- Altri approcci
  - Counting Sort
  - Bucket Sort
  - Radix Sort

Counting Sort
caso banale

- Supponiamo di avere un vettore A[1, n] di n interi, in cui gli elementi sono tutti e soli i valori da 1 a n. Ogni valore compare esattamente una volta
- Quale è la posizione "corretta" (nell'array ordinato) dell'elemento A[i] nell'array originale?
  - Ovviamente (A[i])



Counting Sort
caso meno banale

- I valori di A[1..n] appartengono all'intervallo [1, k] (ciascun valore può comparire zero o più volte)
  - Costruisco un array Y[1, k]; Y[i] conta il numero di volte in cui il valore i compare in A[ ]
  - Ricolloco i valori così ottenuti in A

```
Algoritmo countingSort(int[] A, int k)
    Crea l'Array Y[1..k]
    j = 1
    for i=1 to k do Y[i] = 0
    for i=1 to A.length do Y[A[i]]++
    for i=1 to k do
        while Y[i]> 0 do
            A[j]=i
            j++
            Y[i]--
```

Couting Sort: Costo

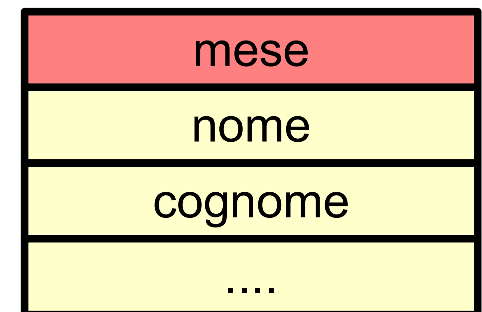
- $O(\max\{n,k\}) = O(n+k)$
- Se $k=\Theta(n)$, allora il costo è $O(n)$

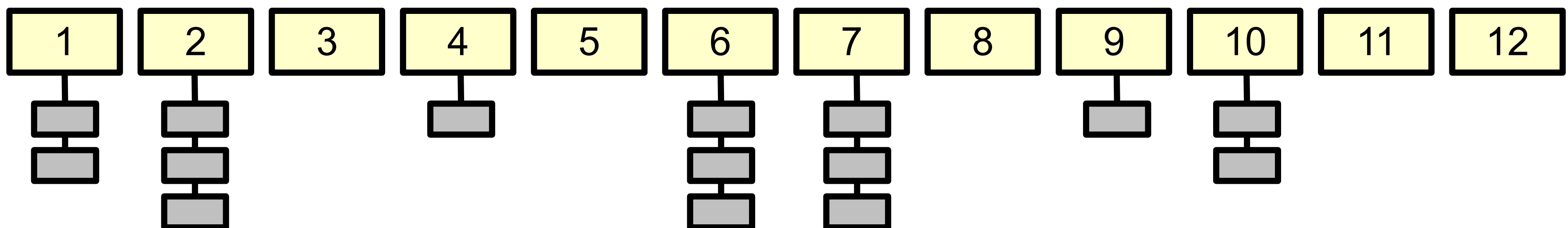
“Pigeonhole Sort” (Bucket Sort)

Torre colombaia
http://www.prolocosalento.it/allistefelline/main.shtml?A=f_alliste

Bucket Sort

- Bucket Sort
  - Cosa succede se i valori da ordinare non sono numeri interi, ma record associati ad una chiave?
  - Non possiamo usare counting
  - Ma possiamo usare liste concatenate





Bucket Sort

- Ordina n record con chiavi intere in [1,k]

```
Algoritmo bucketSort(array X[1..n], intero k)
   Sia Y un array di dimensione k
   for i := 1 to k do
       Y[i]:=lista vuota
   for i := 1 to n do
       Appendi X[i] alla lista Y[chiave(X[i])]
   for i := 1 to k do
       copia ordinatamente in X gli elementi di Y[i]
```

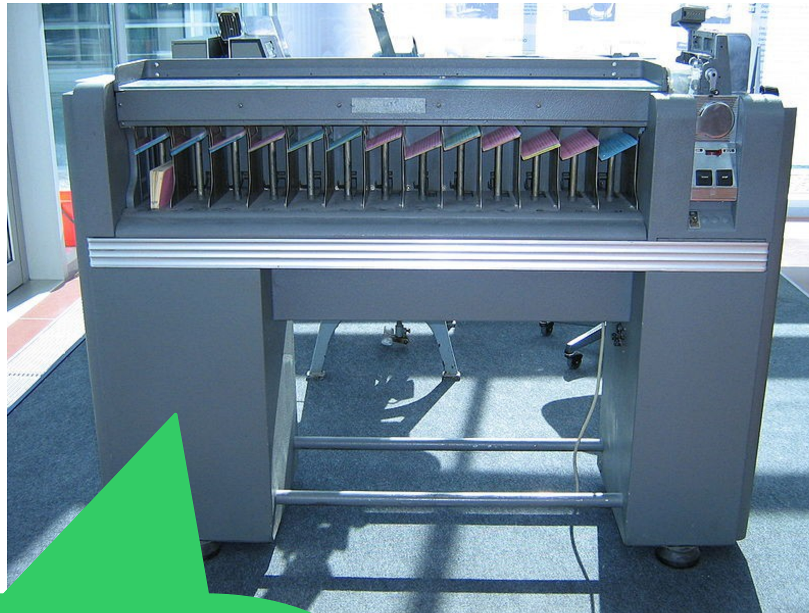
- Costo: $O(n+k)$

Radix Sort

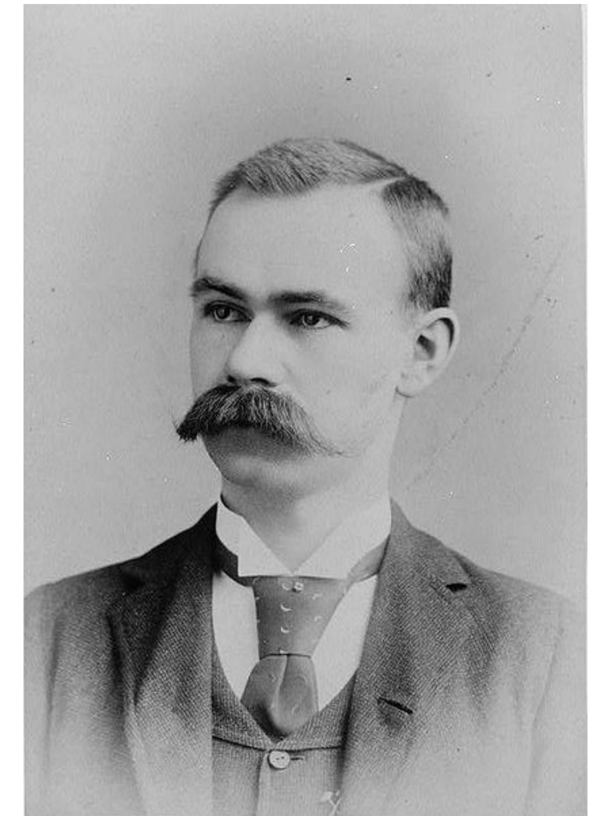
- Bucket Sort è Interessante, ma a volte il valore k è troppo grande
- Esempio
  - Supponiamo di voler ordinare n numeri con 4 cifre decimali
  - Questo richiederebbe $n+10000$ operazion; se $n \log n < n+10000$, questo non sarebbe conveniente
- Idea
  - Ogni cifra decimale è un candidato ideale per Bucket Sort
  - Se Bucket Sort è stabile, possiamo ordinare a partire dalle cifre meno significative

Radix Sort

- Le origini dell'algoritmo risalgono al 1887 (Herman Hollerith e le macchine tabulatrici)



Ordinatrice di schede IBM 082 (13 slots, ogni scheda ha 12 righe di fori + 1 slot per schede scartate)



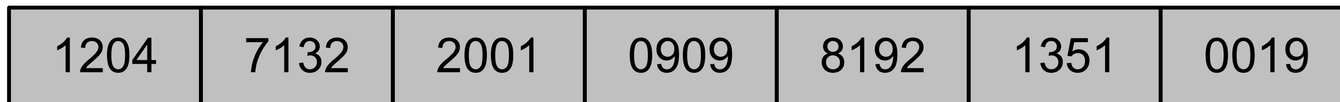
Herman Hollerith (1860—1929)
http://en.wikipedia.org/wiki/Herman_Hollerith

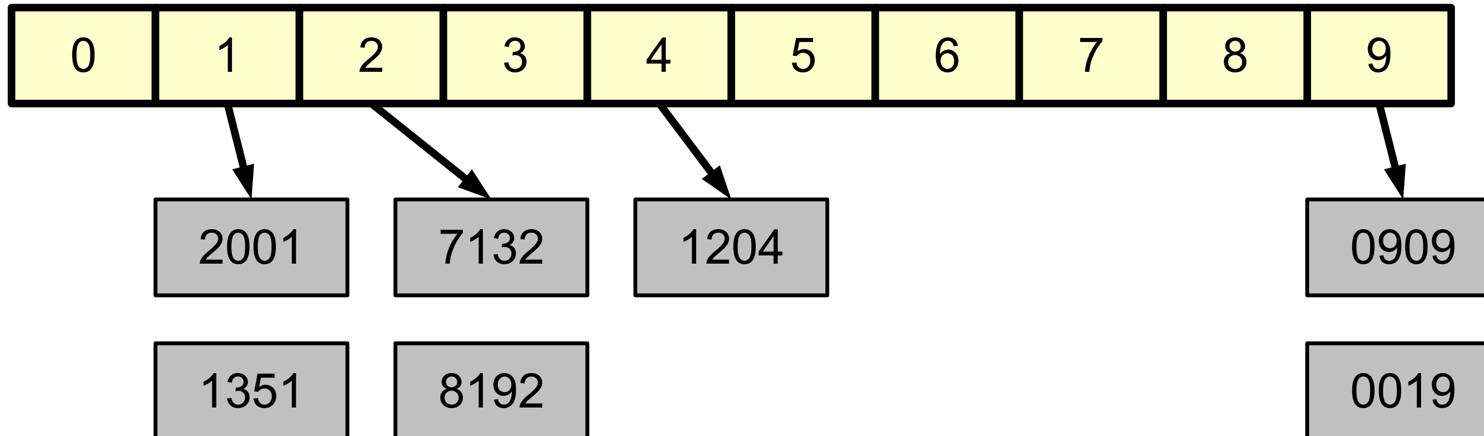
Radix Sort

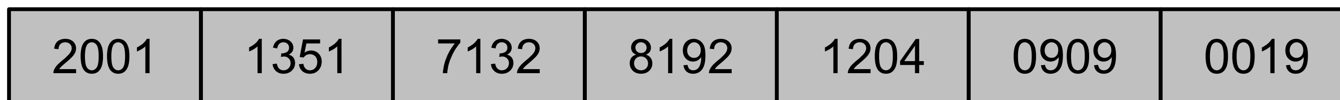
- Idea:
  - Prima ordino in base alla cifra delle unità
  - Poi ordino in base alla cifra delle decine
  - Poi ordino in base alla cifra delle centinaia
  - ...
- Importante: ad ogni passo è indispensabile usare un algoritmo di ordinamento stabile

Esempio

Array di partenza

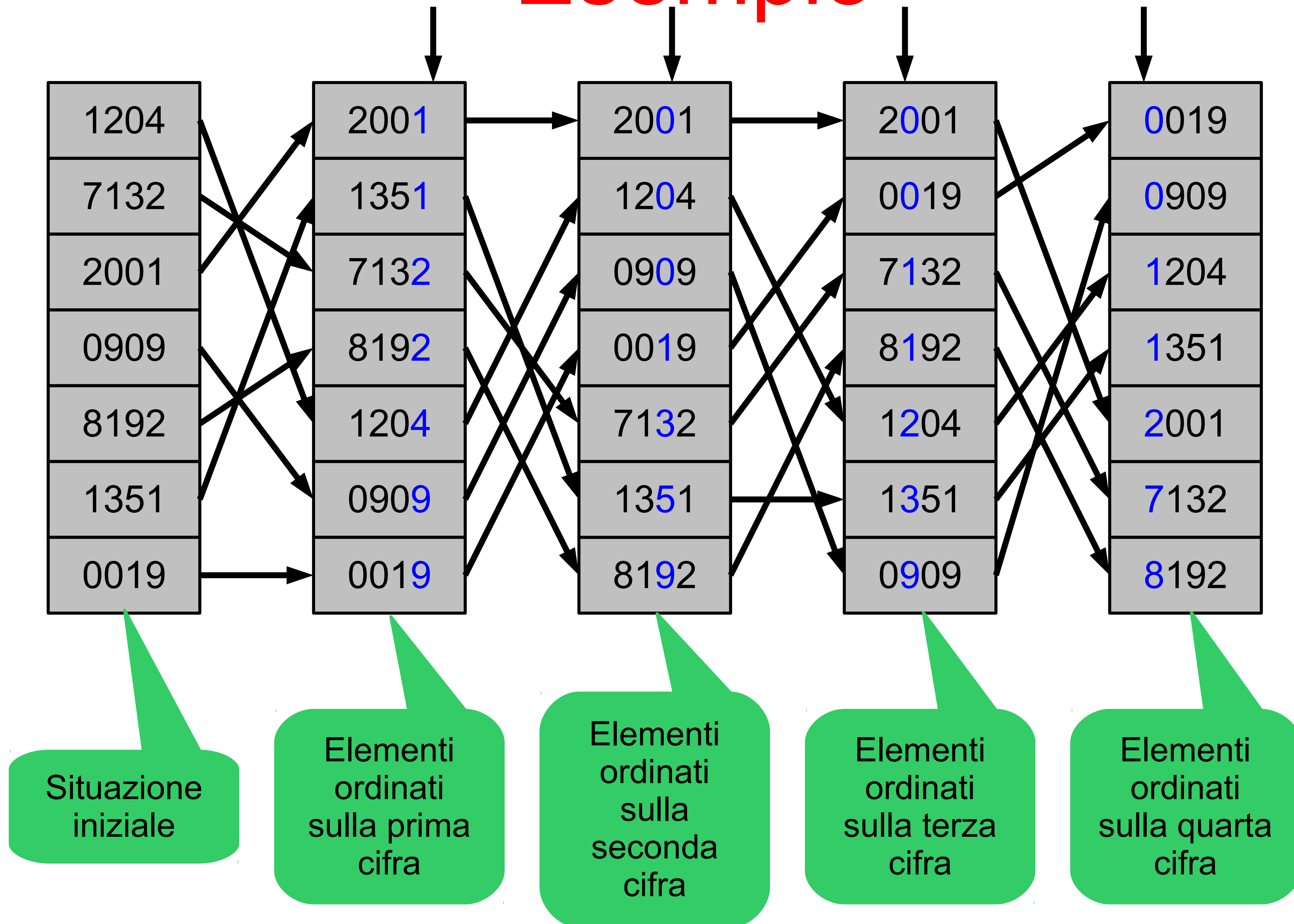






Array ordinato in base alla prima cifra a destra (unità)

Esempio



Radix Sort

- Assume che gli elementi dell'array A abbiano tutti valore nell'intervallo [0, k–1]
- L'ordinamento avviene applicando l'algoritmo Bucket Sort sulle cifre che compongono la rappresentazione in base b degli elementi di A

```
public static void radixSort(int[] A, int k, int b) {
    int t = 0;
    while (t <= Math.ceil(Math.log(k) / Math.log(b))){
        sortByDigit(A, b, t);
        t++;
    }
}
```

Ordinamento (stabile) rispetto alla cifra t (t=0 è quella meno significativa)

Numero di cifre in base b che compongono l'intero k

sortByDigit(A, b, t)

- Una versione specializzata di Bucket Sort per ordinare numeri interi in base alla t-esima cifra (da sinistra) in base b

```
public static void sortByDigit(int[] A, int b, int t) {
    List[] Y = new List[b];
    int temp, c, j;
    for (int i = 0; i < b; i++) Y[i] = new LinkedList();
    for (int i = 0; i < A.length; i++) {
        temp = A[i] % ((int) (Math.pow(b, t + 1)));
        c = (int) Math.floor(temp / (Math.pow(b, t)));
        Y[c].add(new Integer(A[i]));
    }
    j=0;
    for (int i = 0; i < b; i++) {
        while (Y[i].size() > 0) {
            A[j] = ((Integer) Y[i].get(0)).intValue();
            j++;
        }
    }
}
```

Radix Sort

- Teorema
  - Dati n numeri di d cifre, dove ogni cifra può avere b valori distinti, Radix Sort ordina correttamente i numeri in tempo O(d(n+b))
- Dimostrazione (correttezza):
  - Per induzione: dopo *i* chiamate a sortByDigit, i numeri sono ordinati in base alle prime *i* cifre meno significative.
  - **Domanda**: dimostrare.
- Dimostrazione (complessità):
  - d chiamate a sortByDigit, ogni chiamata ha costo O(n+b)

Radix Sort

- Teorema
  - Usando come base (numero di cifre) un valore b=Θ(n), l'algoritmo Radix Sort ordina n numeri interi in [0, k-1] in tempo

$$O\left(n\left(1+\frac{\log k}{\log n}\right)\right)$$

  - **Domanda**: Dimostrare
  - Esempio:
    - 1.000.000 di numeri a 32 bit, base $b=2^{16}$, due passate in tempo lineare sono sufficienti
    - Attenzione: memoria aggiuntiva O(b+n)

Ordinamento—Riassunto

Algoritmo	Stabile?	In loco?	Caso Ottimo	Caso Pessimo	Caso Medio
Insertion Sort	Si	Si	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Selection Sort	Si	Si	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Merge Sort	Si	No	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$
Quick Sort	No	Si	$\Theta(n \log n)$	$O(n^2)$	$\Theta(n \log n)$
Heap Sort	No	Si	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Couting Sort	N.A.	No	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$
Bucket Sort	Si	No	$O(n+k)$	$O(n+k)$	$O(n+k)$
Radix Sort	Si	No	$O(d(n+b))$	$O(d(n+b))$	$O(d(n+b))$

Ordinamento—Riassunto

- Insertion Sort / Selection Sort
  - $\Theta(n^2)$, stabile, in loco, iterativo.
- Merge Sort
  - $\Theta(n \log n)$, stabile, richiede $O(n)$ spazio aggiuntivo, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack).
- Heap Sort
  - $O(n \log n)$, non stabile, sul posto, iterativo.
- Quick Sort
  - $\Theta(n \log n)$ in media, $\Theta(n^2)$ nel caso peggiore, non stabile, ricorsivo (richiede $O(\log n)$ spazio nello stack).

Ordinamento—Riassunto

- Counting Sort
  - O(n+k), richiede O(k) memoria aggiuntiva, iterativo. Conveniente quando k=O(n)
- Bucket Sort
  - O(n+k), stabile, richiede O(n+k) memoria aggiuntiva, iterativo. Conveniente quando k=O(n)
- Radix Sort
  - O(d(n+b)), richiede O(n+b) memoria aggiuntiva. Conveniente quando b=O(n).

Ordinamento—Conclusioni

- Divide-et-impera
  - Merge Sort: “divide” semplice, “combina” complesso
  - Quick Sort: “divide” complesso, “combina” nullo
- Utilizzo di strutture dati efficienti
  - Heap Sort basato su Heap
- Randomizzazione
  - La tecnica di randomizzazione ci permette di “evitare” il caso pessimo
- Dipendenza dal modello
  - Cambiando l'insieme di assunzioni, è possibile ottenere algoritmi più efficienti