Strutture dati elementari

Damiano Macedonio
Università Ca' Foscari di Venezia

mace@unive.it

Introduzione

- Tipo di dato astratto
  - Un modello matematico, dato da una collezione di valori e un insieme di operazioni ammesse su questi valori
- Tipo di dato primitivo
  - Forniti direttamente dal linguaggio
  - Esempi: int (+,-,*,/, %), boolean (!, &&, ||)
- Tipo di dato
  - “Specifica” e “implementazione” di un tipo di dato astratto
  - Specifica: “manuale d'uso”, nasconde i dettagli implementativi all'utilizzatore
  - Implementazione: realizzazione vera e propria

Strutture dati

- I dati sono spesso riuniti in insiemi detti strutture dati
  - sono caratterizzati più dall'organizzazione dei dati che dal tipo dei dati stessi
  - il tipo dei dati contenuti può essere parametrico (*templates* in C++, o *generics* in Java)
- Una struttura dati è composta da:
  - un modo sistematico di organizzare i dati
  - un insieme di operazioni per manipolare la struttura
- Alcune tipologie di strutture dati:
  - lineari / non lineari (presenza di una sequenza)
  - statiche / dinamiche (variazione di dimensione, contenuto)
  - omogenee / disomogenee (dati contenuti)

Esempio: Dizionario (Insieme dinamico)

- Struttura dati “generale”: insieme dinamico
  - Può crescere, contrarsi, cambiare contenuto
  - Operazioni base: inserimento, cancellazione, ricerca
- Esempio di specifica:

```
public interface Dizionario {

    public void insert(Object e, Comparable k);

    public void delete(Comparable k);

    public Object search(Comparable k);
}
```

Alcune possibili implementazioni Array ordinati

- search(Key k)
  - Cerca la chiave k mediante ricerca binaria
  - Costo: O(log n)
- insert(Key k, Item o)
  - Inserisci un nuovo elemento, spostando a destra di una posizione tutti gli elementi successivi
  - Costo: O(n)
- delete(Key k)
  - Cerca la chiave k mediante ricerca binaria
  - Elimina l'elemento contenente la chiave k, spostando a sinistra di una posizione tutti gli elementi successivi
  - Costo: O(n)

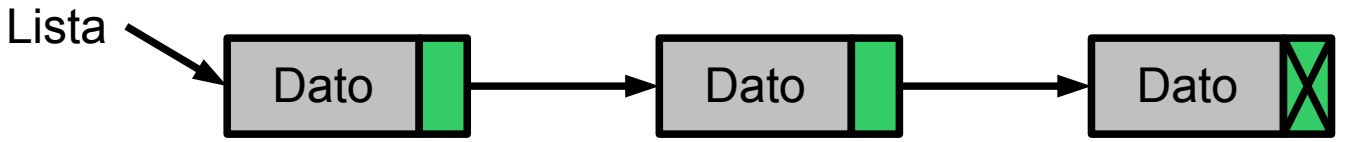
Alcune implementazioni possibili Liste concatenate (non ordinate)

- search(Key k)
  - Cerca la chiave k mediante ricerca sequenziale
  - Costo: O(n)
- insert(Key k, Item o)
  - Inserisci l'elemento all'inizio della lista
  - Costo complessivo: O(1)
- delete(Key k)
  - Cerca la chiave k mediante ricerca sequenziale (costo O(n))
  - Elimina l'elemento (costo O(1))
  - Costo complessivo: O(n)

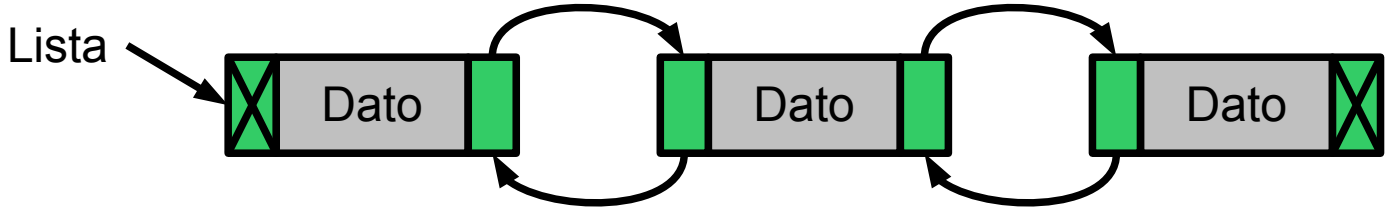
Strutture dati elementari

Strutture collegate
alcune implementazioni possibili

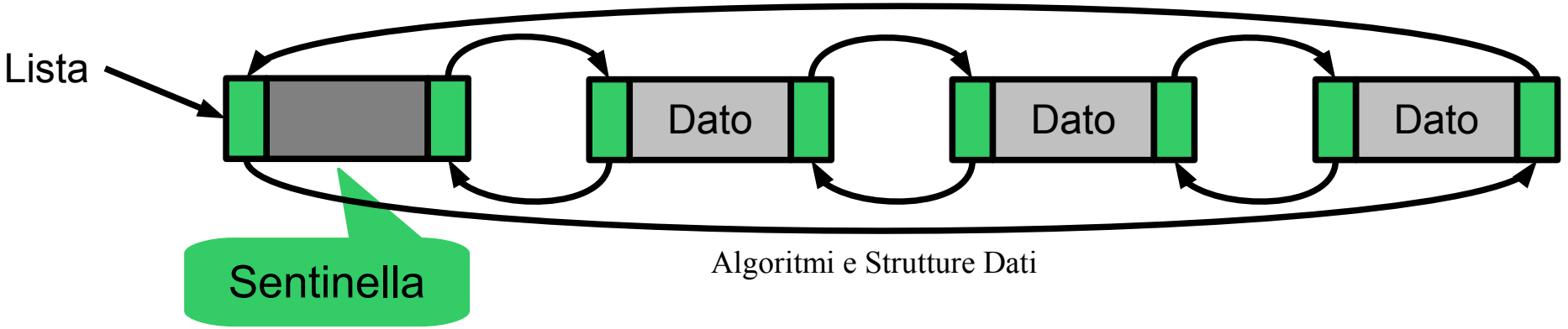
- Liste semplici



- Liste doppiamente concatenate



- Liste circolari con sentinella



Esempio

asdlab.libreria.StruttureElem

```
// Implementazione basata su lista circolare
// SENZA sentinella
public class StrutturaCollegata implements Dizionario {

    private Record list = null;

    private final class Record { ... }

    public void insert(Object e, Comparable k)
    { ... }

    public void delete(Comparable k)
    { ... }

    public Object search(Comparable k)
    { ... }

}
```

Esempio

asdlab.libreria.StruttureElem

```
private final class Record {
    public Object     elem;
    public Comparable chiave;
    public Record     next;
    public Record     prev;

    public Record(Object e, Comparable k) {
        elem = e;
        chiave = k;
        next = prev = null;
    }
}
```

Esempio

asdlab.libreria.StruttureElem

```
public void insert(Object e, Comparable k) {
    Record p = new Record(e, k);
    if (list == null)
        list = p.prev = p.next = p;
    else {
        p.next = list.next;
        list.next.prev = p;
        list.next = p;
        p.prev = list;
    }
}
```

L'uso della sentinella eviterebbe la gestione di questo caso particolare

Il nuovo elemento viene inserito immediatamente dopo la testa della lista

Costo: O(1)

Esempio

asdlab.libreria.StruttureElem

```
public void delete(Comparable k) {
    Record p = null;
    if (list != null)
        for (p = list.next; ; p = p.next){
            if (p.chiave.equals(k)) break;
            if (p == list) { p = null; break; }
        }
    if (p == null)
        throw new EccezioneChiaveNonValida();
    if (p.next == p)
        list = null;
    else {
        if (list == p) list = p.next;
        p.next.prev = p.prev;
        p.prev.next = p.next;
    }
}
```

Costo: O(n)

Esempio

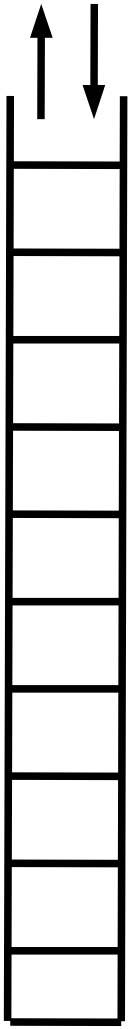
asdlab.libreria.StruttureElem

```
public Object search(Comparable k) {
    if (list == null)
      return null;
    for (Record p = list.next; ; p = p.next){
      if (p.chiave.equals(k))
        return p.elem;
      if (p == list)
        return null;
    }
}
```

Costo: O(n)

Stack

- Insieme dinamico in cui l'elemento rimosso dall'operazione di cancellazione è l'ultimo inserito
  - politica "Last In, First Out" (LIFO)
- Operazioni previste
  - void push(Item) # inserisce un elemento in cima
  - Item pop() # rimuove l'elemento in cima
  - Item top() # non rimuove; legge solamente
  - boolean isEmpty()



Stack

- Possibili utilizzi
  - Nei linguaggi con procedure: gestione dei record di attivazione
  - Nei linguaggi stack-oriented:
    - Tutte le operazioni elementari lavorano prendendo uno-due operandi dallo stack e inserendo il risultato nello stack
    - Es: Postscript, Java bytecode
- Possibili implementazioni
  - Tramite liste puntate doppie
    - puntatore all'elemento top, per estrazione/inserimento
  - Tramite array
    - dimensione limitata, overhead più basso

Interfaccia Pila

asdlab.libreria.StruttureElem

```
public interface Pila {
    /**
     * Verifica se la pila è vuota.
     */
    public boolean isEmpty();
    /**
     * Aggiunge l'elemento in cima
     */
    public void push(Object e);
    /**
     * Restituisce l'elemento in cima
     */
    public Object top();
    /**
     * Cancella l'elemento in cima
     */
    public Object pop();
}
```

Implementare una pila tramite array
(metodo del raddoppiamento/dimenzzamento)

```
public class PilaArray implements Pila
{
    private Object[] S = new Object[1];
    private int n = 0;

    public boolean isEmpty() {
        return n == 0;
    }

    public void push(Object e) { ... }
    public Object top() { ... }
    public Object pop() { ... }
}
```

PilaArray: metodo top()

```
public Object top() {
    if (this.isEmpty())
        throw new EccezioneStrutturaVuota("Pila vuota");
    return S[n - 1];
}
```

Costo: O(1)

PilaArray: metodo push()

```
public void push(Object e) {
    if (n == S.length) {
        Object[] temp = new Object[2 * S.length];
        for (int i = 0; i < n; i++)
            temp[i] = S[i];
        S = temp;
    }
    S[n] = e;
    n = n + 1;
}
```

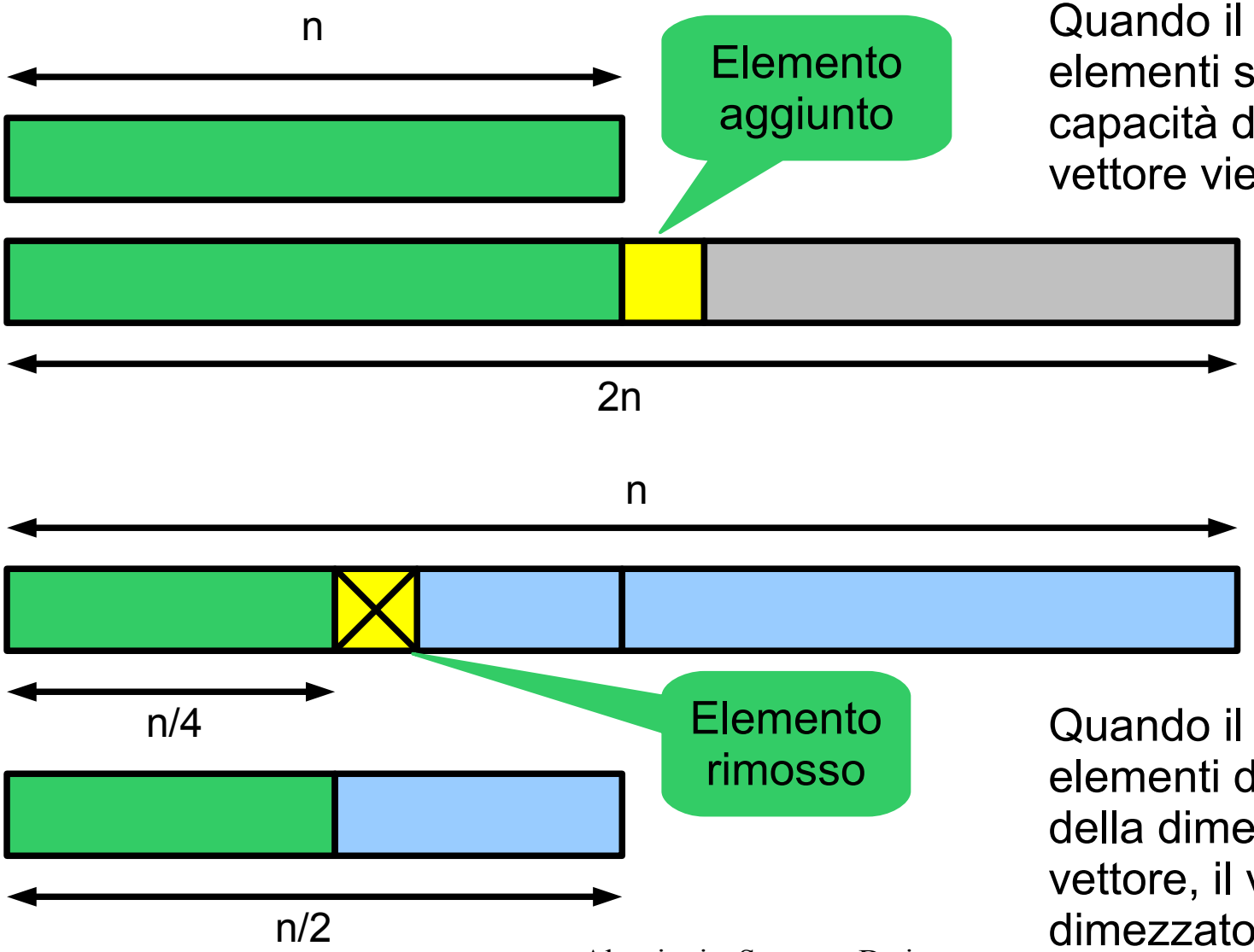
Costo:???

PilaArray: metodo pop()

```
public Object pop() {
    if (this.isEmpty())
        throw new EccezioneStrutturaVuota("Pila vuota");
    n = n - 1;
    Object e = S[n];
    if (n > 1 && n == S.length / 4) {
        Object[] temp = new Object[S.length / 2];
        for (int i = 0; i < n; i++)
            temp[i] = S[i];
        S = temp;
    }
    return e;
}
```

Costo: ???

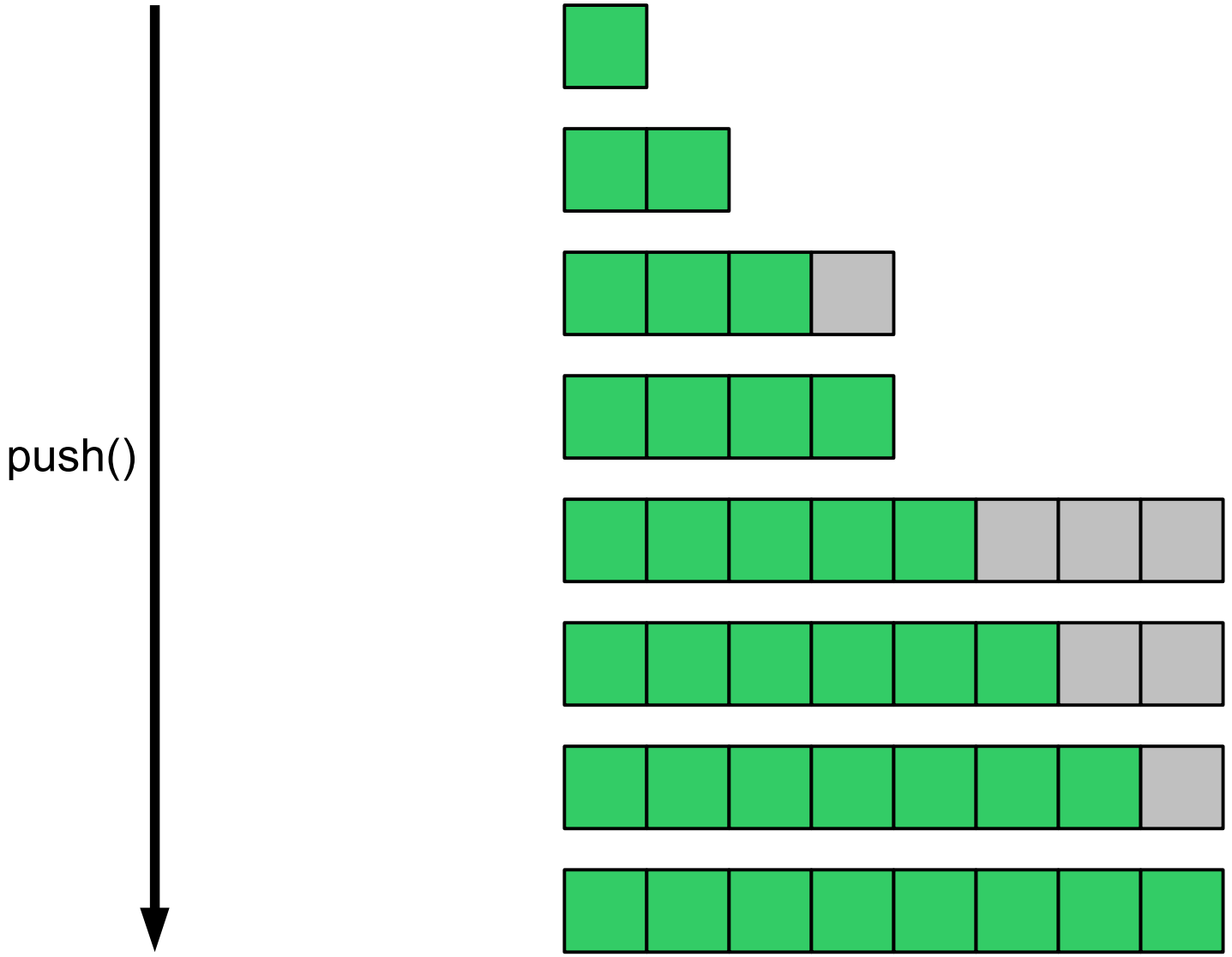
Metodo del raddoppiamento/dimezzamento



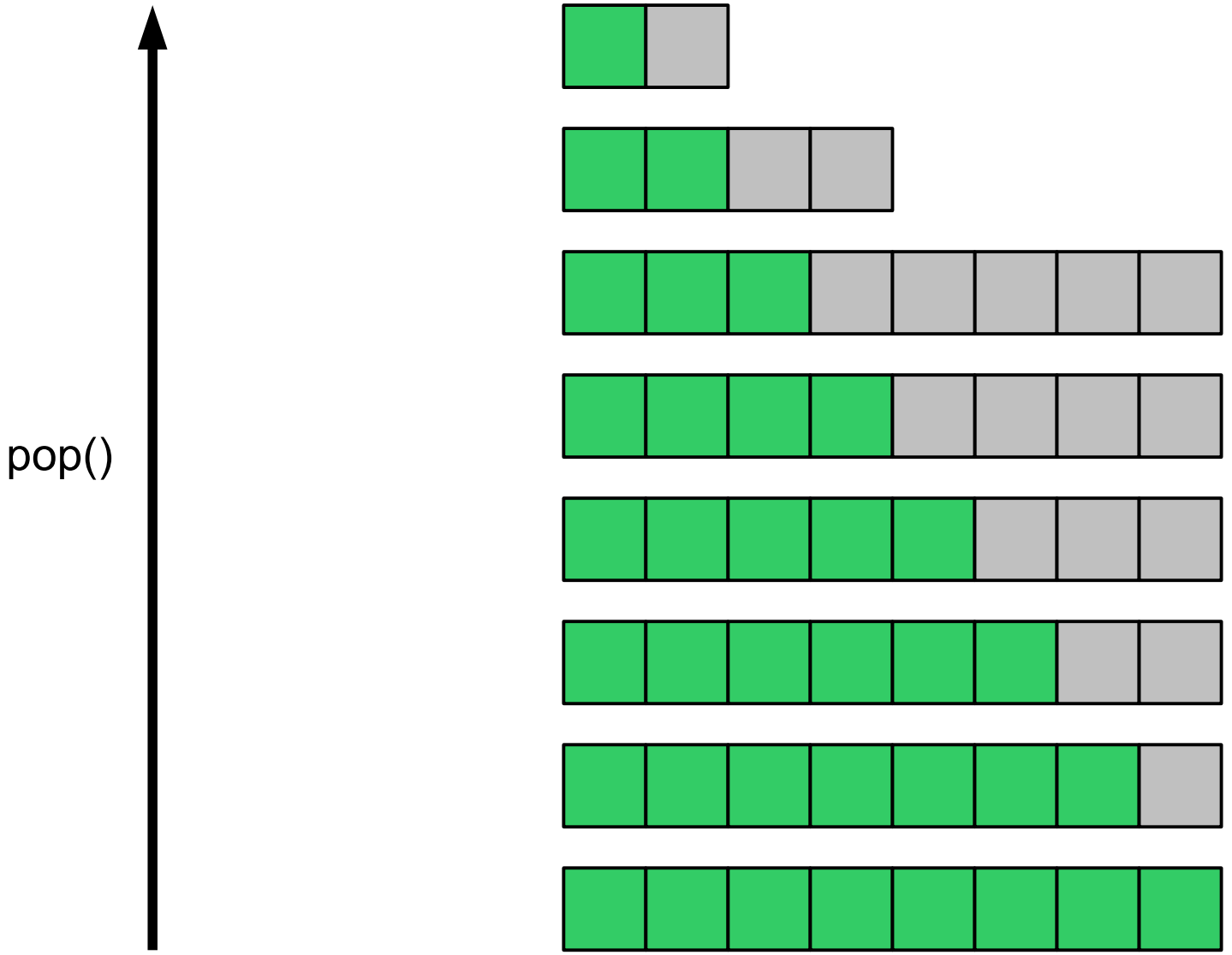
Quando il numero di elementi supera la capacità del vettore, il vettore viene raddoppiato

Quando il numero di elementi diventa un quarto della dimensione del vettore, il vettore viene dimezzato

Analisi delle operazioni push() e pop()



Analisi delle operazioni push() e pop()



Analisi delle operazioni push() e pop()

- Nel caso peggiore, entrambe sono O(n)
- Nel caso migliore, entrambe sono O(1)
- Partendo dallo stack vuoto, quanto costano n operazioni push() consecutive?
  - O(n)
- Partendo da uno stack con n elementi, quanto costano n operazioni pop() consecutive?
  - O(n)
- Partendo da uno stack con numero *arbitrario* di elementi, quanto costano k operazioni (*arbitrarie*) consecutive?
  - Analisi ammortizzata

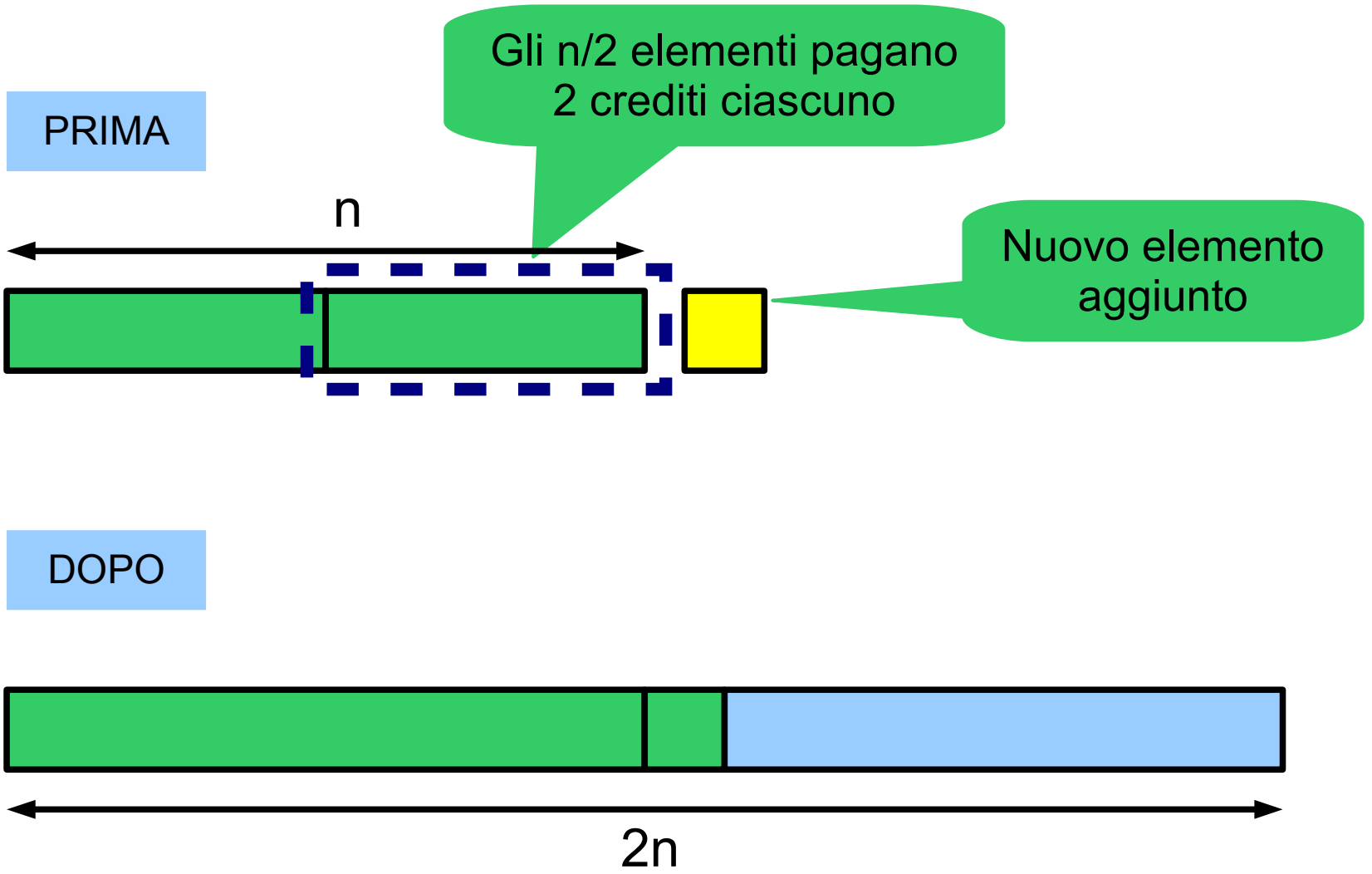
Analisi ammortizzata: il metodo dei crediti

- Associamo a ciascun elemento della struttura dati un numero di crediti
  - Un credito può essere utilizzato per eseguire O(1) operazioni elementari
- Quando creo un elemento la prima volta, “pago” un certo numero di crediti
- Userò quei crediti per pagare ulteriori operazioni su quell'elemento, in futuro

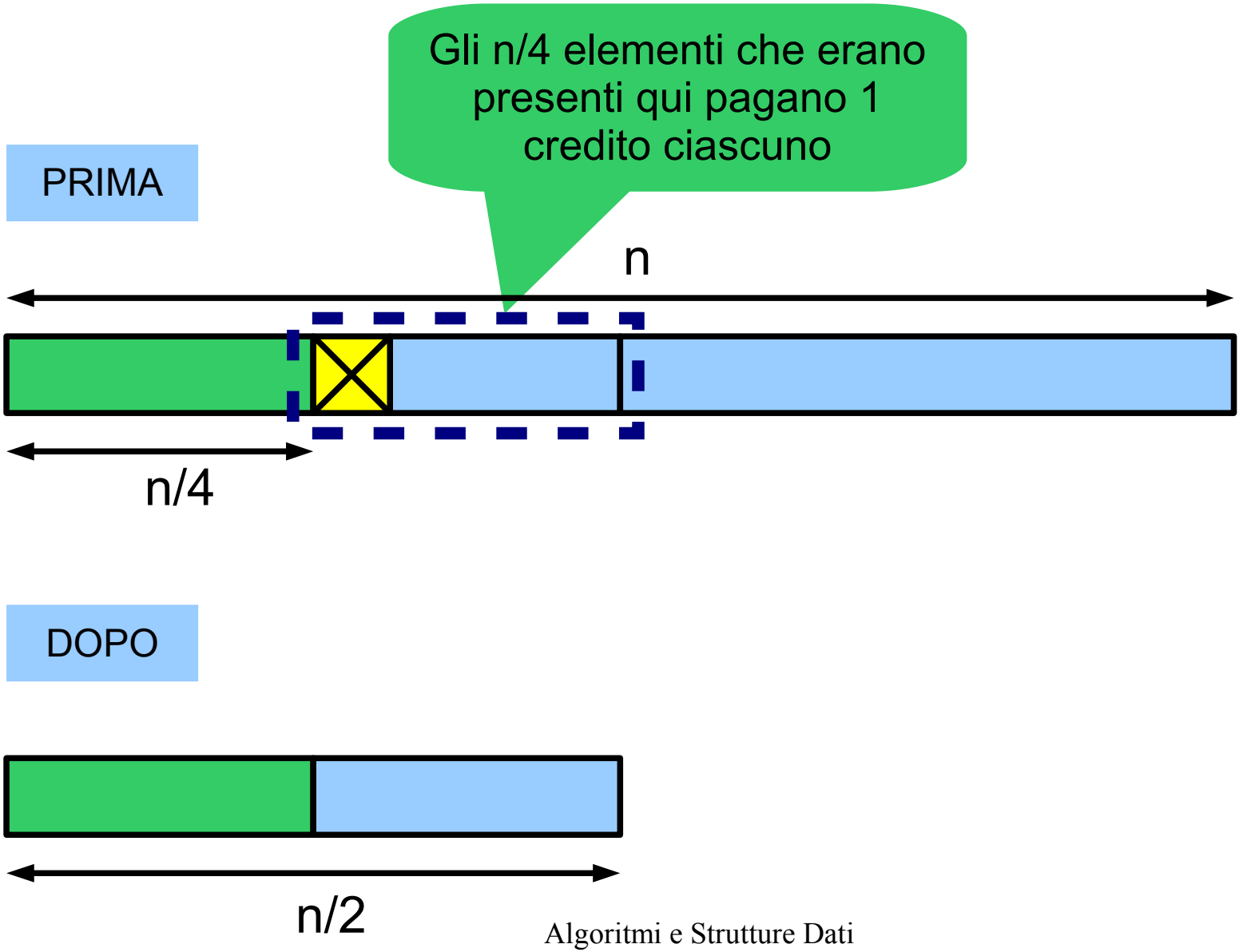
Analisi ammortizzata delle operazioni push() e pop()

- L'inserimento di un elemento nello stack deposita 3 crediti sulla cella dell'array che viene usata
- Quando devo raddoppiare
  - Sottraggo 2 crediti dalle celle nella seconda metà dell'array (prima del raddoppio);
  - Uso questi crediti per “pagare” l'operazione di copia dei valori dall'array originale a quello “raddoppiato”
- Quando devo dimezzare
  - Sottraggo 1 credito dalle celle nel secondo quarto dell'array (prima del dimezzamento)
  - Uso questi crediti per “pagare” l'operazione di copia

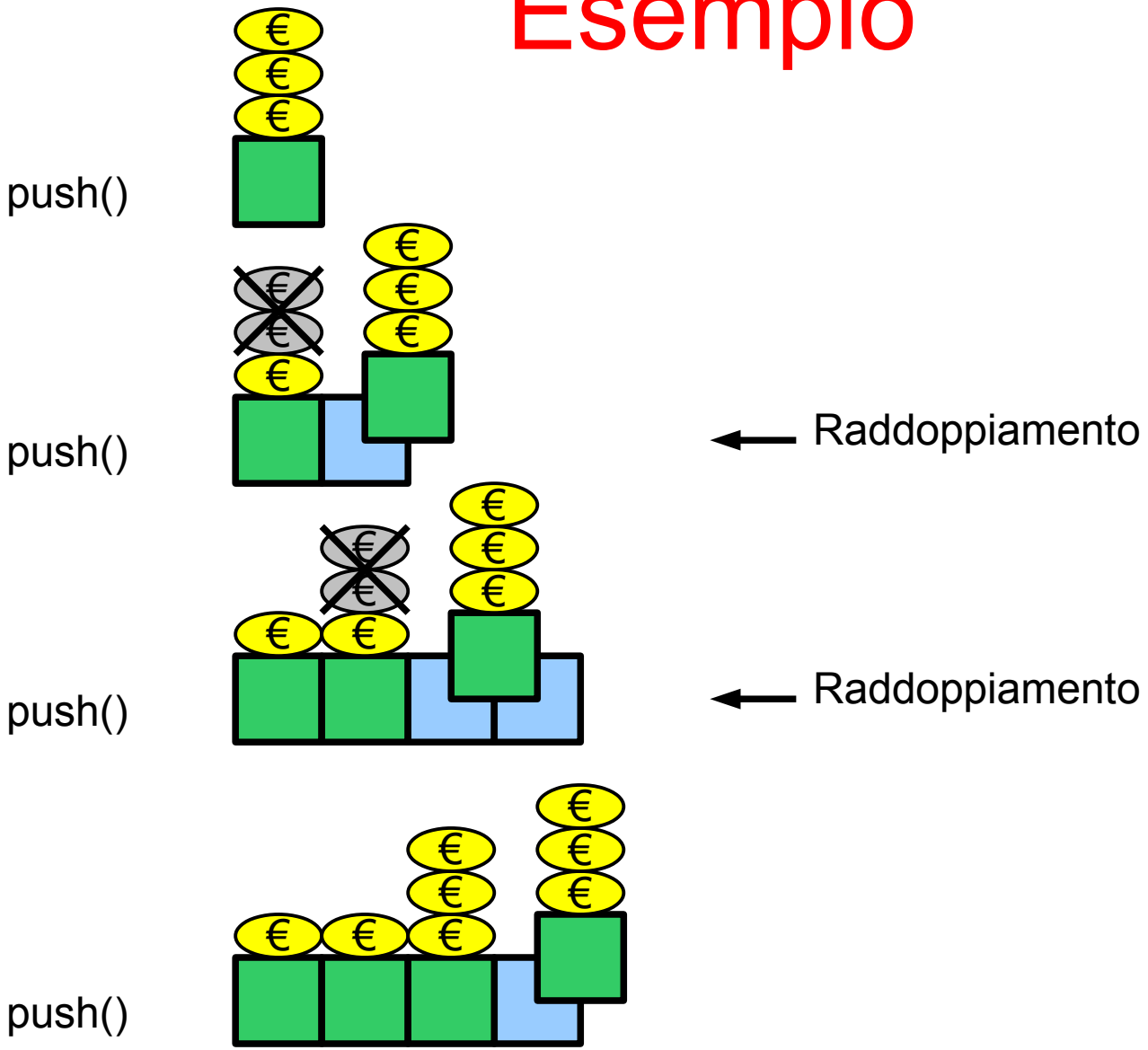
Analisi ammortizzata



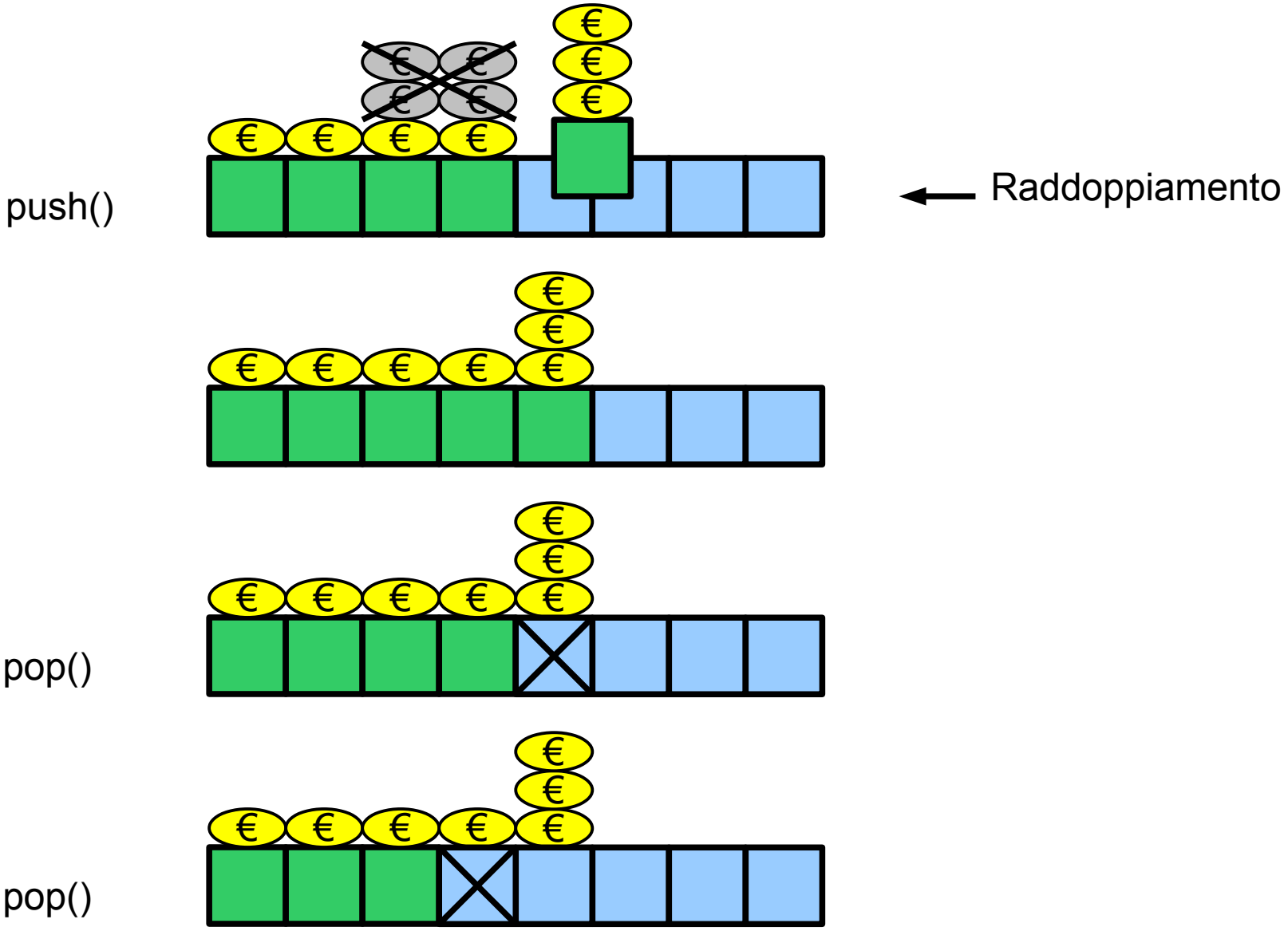
Analisi ammortizzata



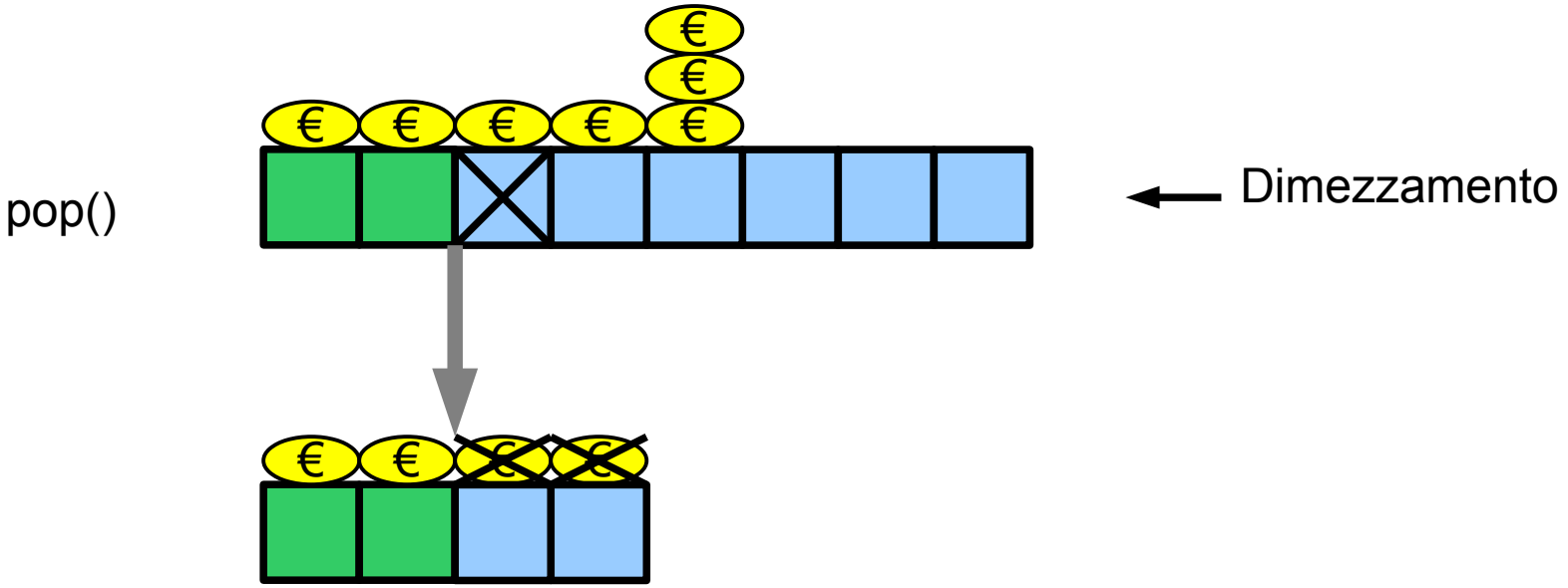
Esempio



Esempio (cont.)

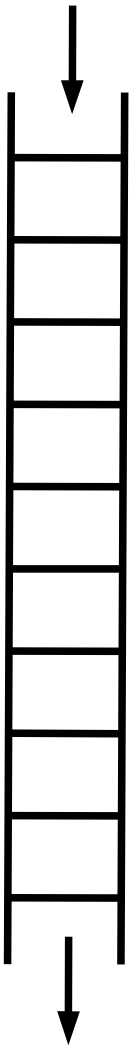


Esempio (cont.)



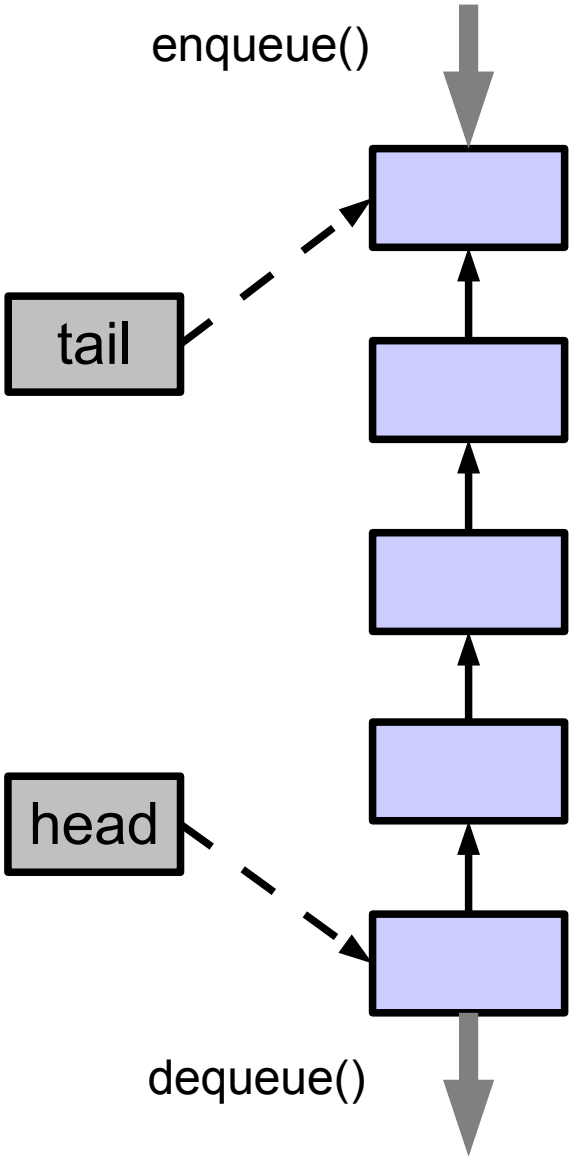
Coda (Queue)

- Insieme dinamico in cui l'elemento rimosso dall'operazione di cancellazione è quello che da più tempo è presente
  - politica "first in, first out" (FIFO)
- Operazioni previste (tutte O(1))
  - void enqueue(Item)
  - Item dequeue()
  - Item first()
  - boolean isEmpty()

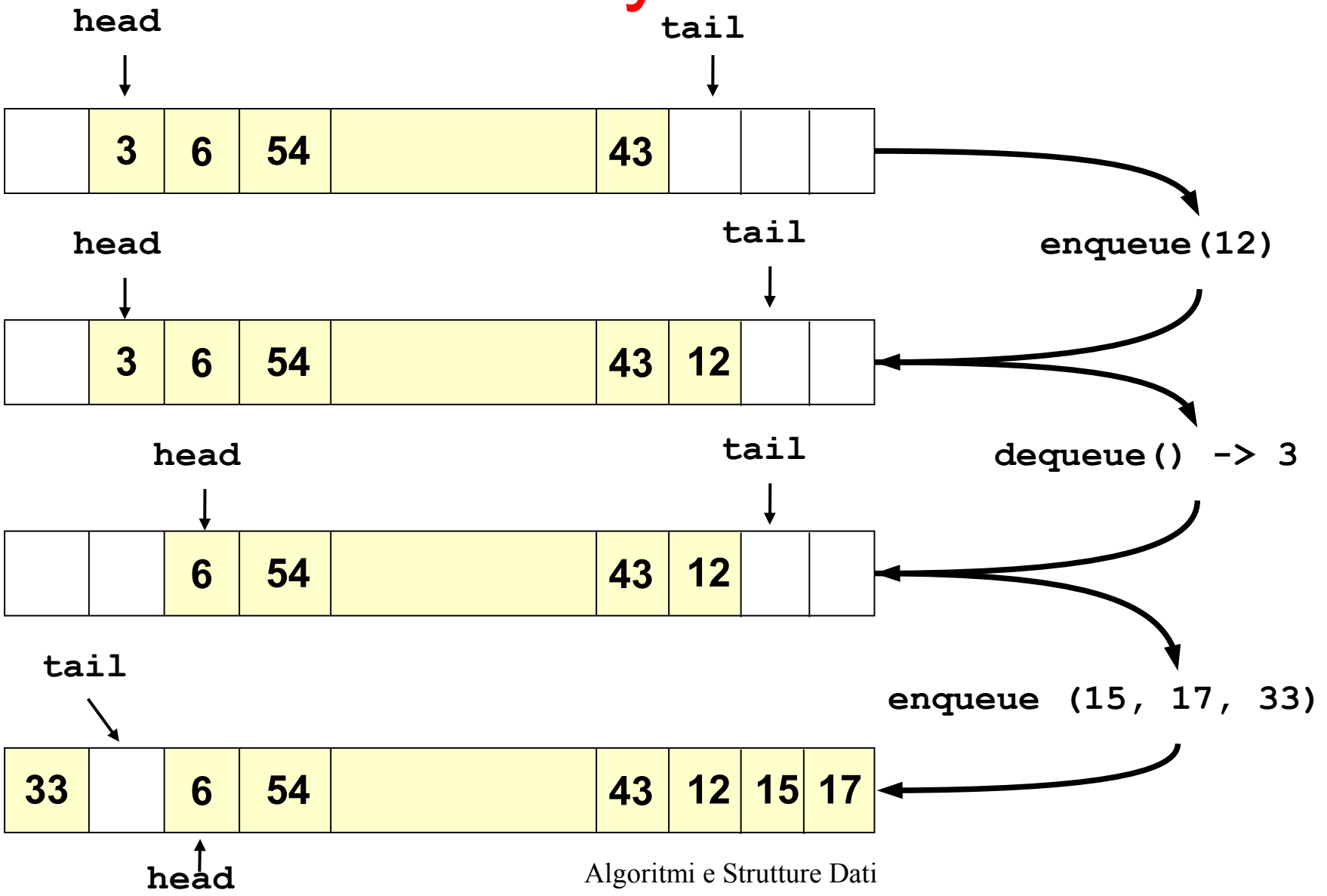


Coda

- Possibili utilizzi
  - Nei sistemi operativi, i processi in attesa di utilizzare una risorsa vengono gestiti tramite una coda
- Possibili implementazioni
  - Tramite liste puntate semplici
    - puntatore *head* (inizio della coda), per estrazione
    - puntatore *tail* (fine della coda), per inserimento
    - Esempio: classe CodaCollegata in asdlab.libreria.StruttureElem
  - Tramite array circolari
    - dimensione limitata, overhead più basso



Queue: Implementazione tramite array circolari



Queue: Implementazione tramite array circolari (Java)

```
public class Queue {

  private Object[] buffer = new int[MAX_SIZE];
  private int head;       // "Dequeuing" index
  private int tail;       // "Enqueuing" index
  private int size;       // Number of elements

  public Queue() { head = tail = size = 0; }
  public boolean isEmpty() { return size=0; }

  public Object head() {
    if (size == 0) throw new Exception("Empty");
    else return buffer[head];
  }
```

Costo: O(1)

Queue: Implementazione tramite array circolari (Java)

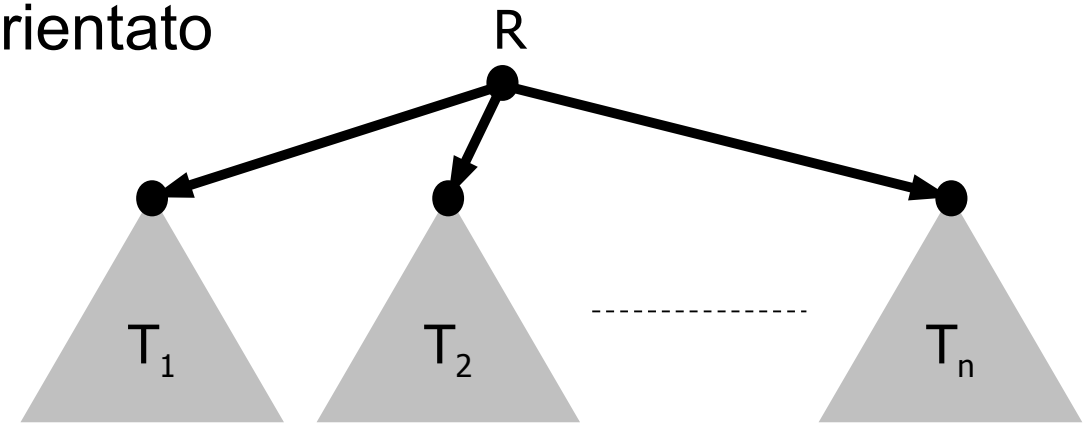
Costo: O(1)

Costo: O(1)

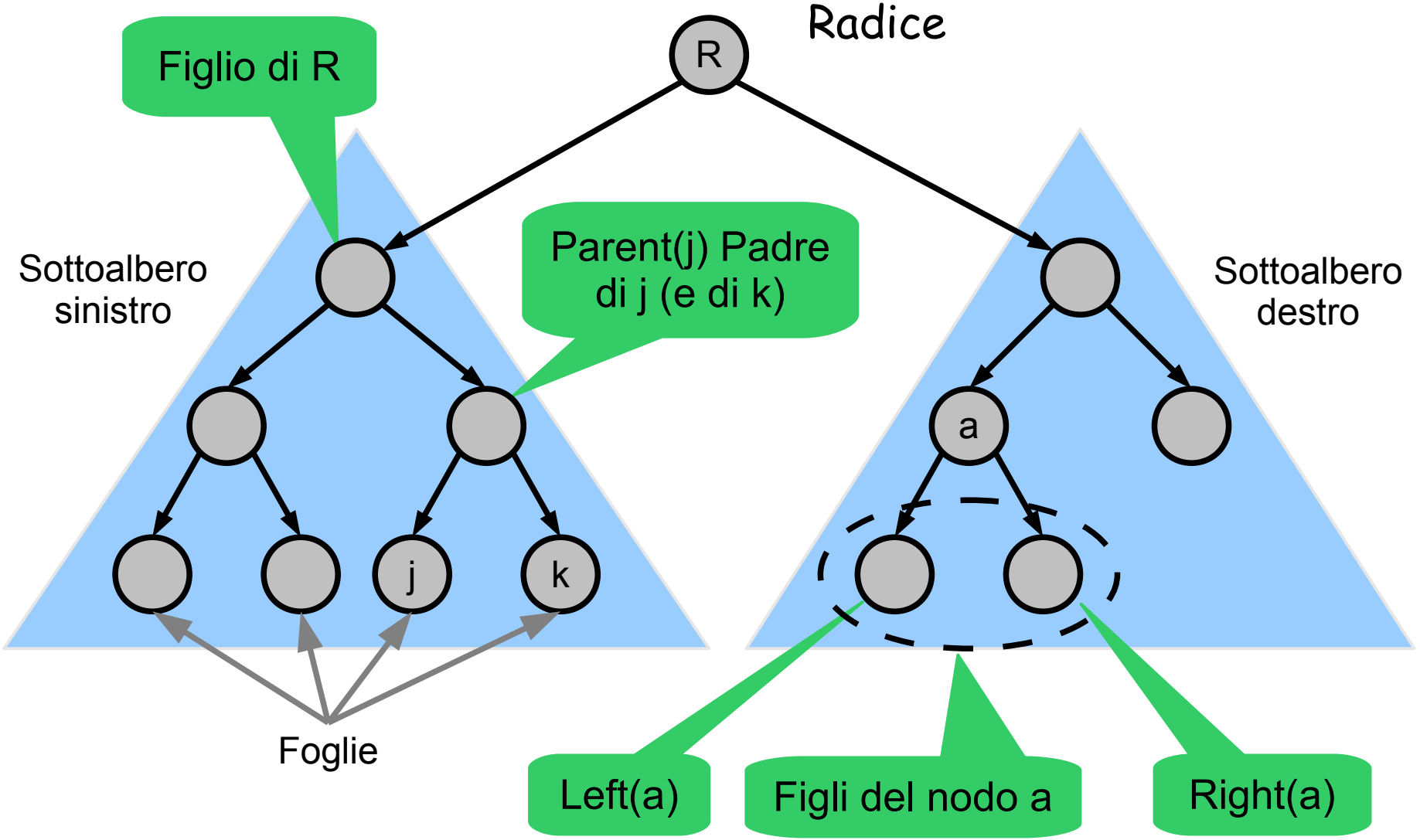
```
    public void enqueue(Object o) {
        if (size == buffer.length)
            throw new Exception("Full");
        buffer[tail] = o;
        tail =(tail+1) % buffer.length;
        size++;
    }

    public Object dequeue() {
        if (size == 0) throw new Exception("Empty");
        Object res = buffer[head];
        head =(head+1) % buffer.length;
        size--;
        return res;
    }
}
```

Alberi radicati

- Albero: definizione informale
  - È un insieme dinamico i cui elementi hanno relazioni di tipo gerarchico
- Albero: definizione ricorsiva
  - Insieme vuoto di nodi, oppure
  - Una radice R e zero o più alberi disgiunti (detti *sottoalberi*), con la radice R collegata alla radice di ogni sottoalbero da un arco orientato

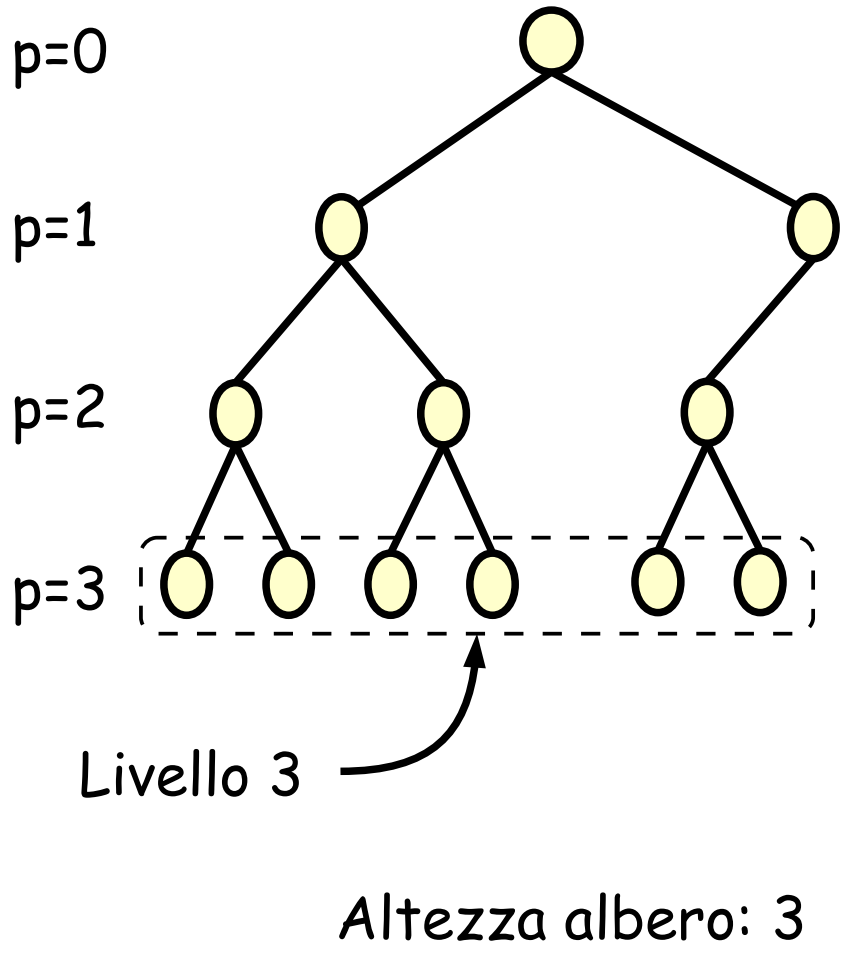


Alberi binari radicati

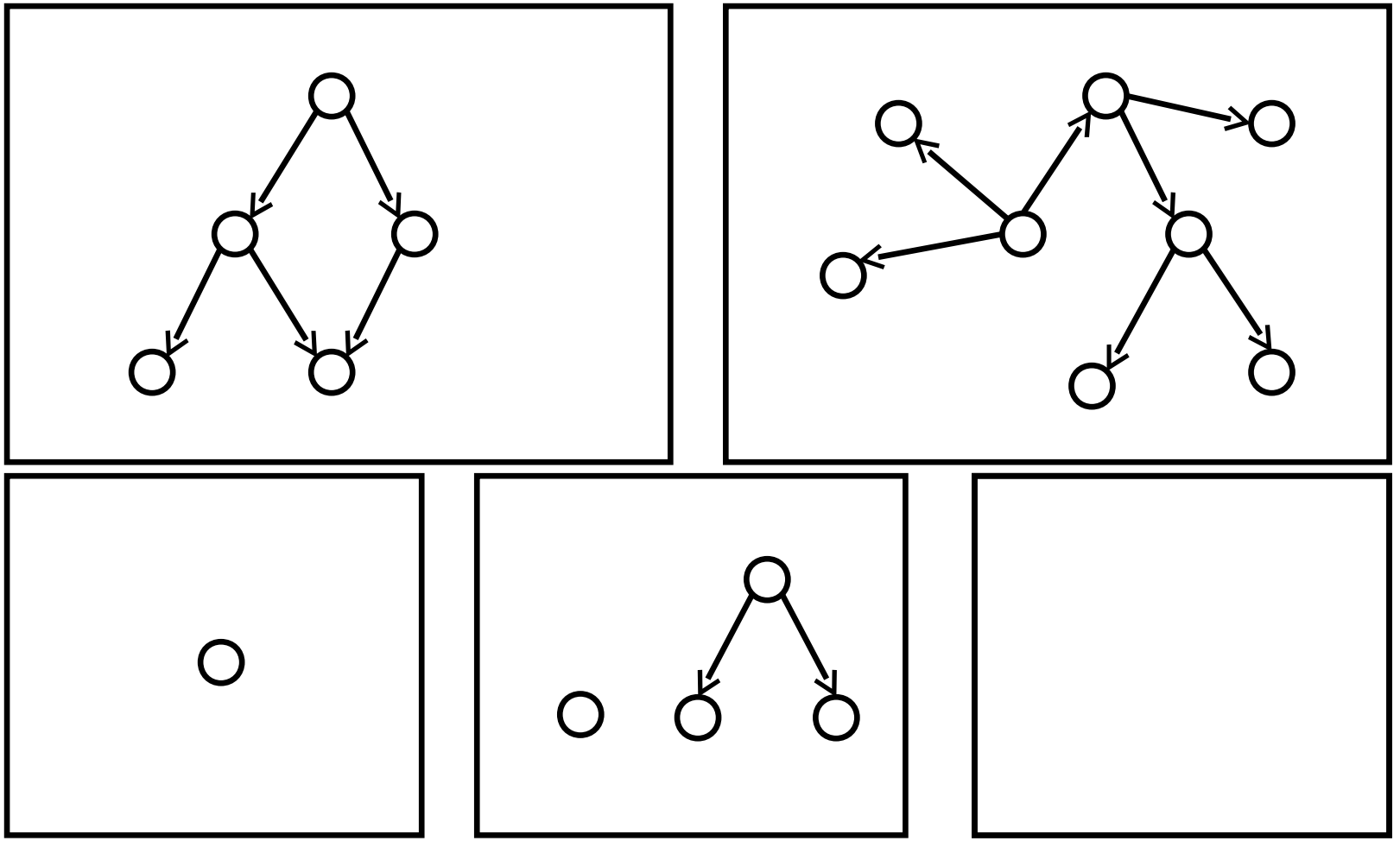


Alberi: definizioni

- La profondità di un nodo è la lunghezza del percorso dalla radice al nodo (numero archi attraversati)
- Livello: l'insieme dei nodi alla stessa profondità
- Altezza dell'albero: massima profondità
- Grado di un nodo: # figli



Alberi?



Operazioni sugli alberi

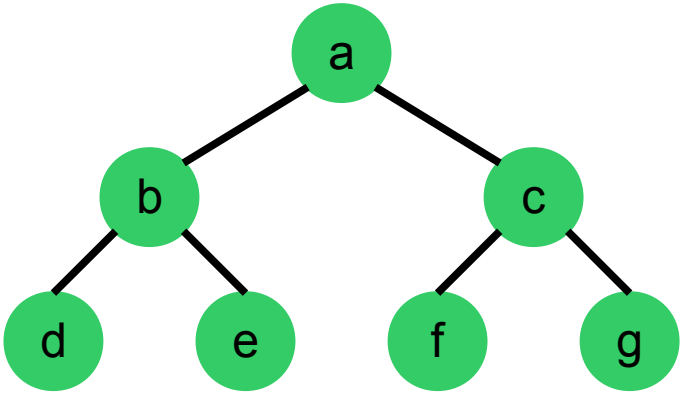
- numNodi() → intero
- grado(nodo v) → intero *(numero di figli)*
- padre(nodo v) → nodo
- figli(nodo v) → <nodo, nodo, … nodo>
- aggiungiNodo(nodo u) → nodo
  - Aggiunge un nuovo nodo v come figlio di u; restituisce v
- aggiungiSottoalbero(Albero a, nodo u)
  - Aggiunge il sottoalbero a in modo che la radice di a diventi figlia di u
- rimuoviSottoalbero(nodo v) → albero
  - stacca e restituisce il sottoalbero radicato in v

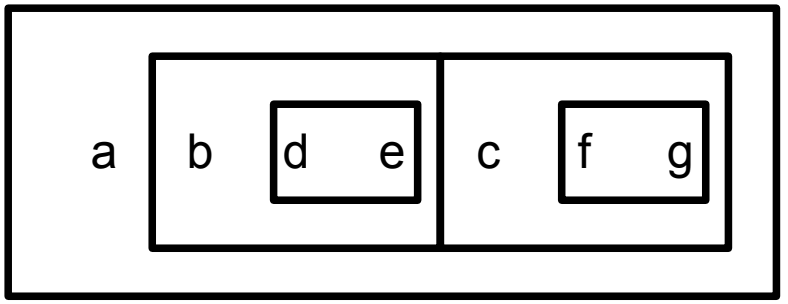
Algoritmi di visita degli alberi

- Visita (o attraversamento) di un albero:
  - Algoritmo per “visitare” tutti i nodi di un albero
- In profondità (*depth-first search,* DFS*)*
  - Vengono visitati i rami, uno dopo l’altro
  - Esistono tre varianti (pre-ordine, in-ordine, post-ordine)
- In ampiezza *(breadth-first search*, BFS)
  - A livelli, partendo dalla radice

Visita alberi binari in profondità pre-ordine

```
Algoritmo visita-preordine(T)
if ( T ≠ nil ) {
  Visita T
  visita-preordine(T.left())
  visita-preordine(T.right())
}
```

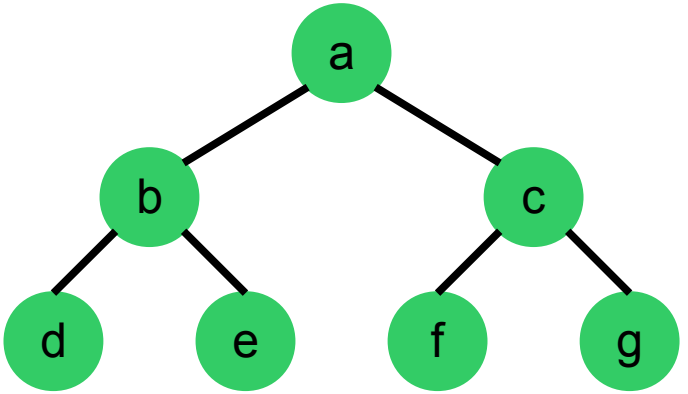


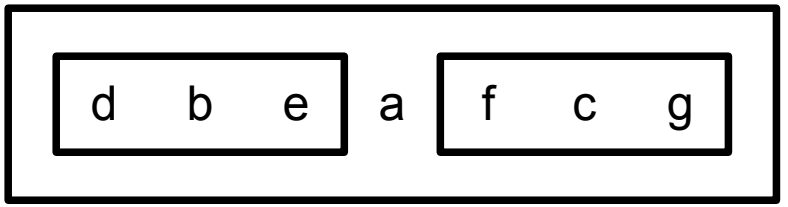


- Nota: gli algoritmi di visita si possono facilmente generalizzare al caso di albero non binario

Visita alberi binari in profondità in-ordine (simmetrica)

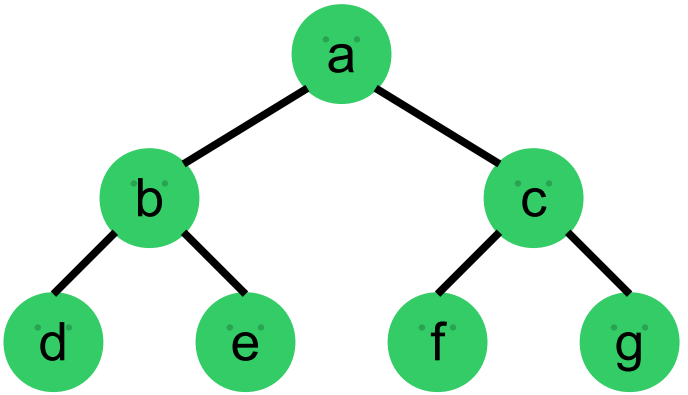
```
Algoritmo visita-inordine(T)
if ( T ≠ null ) {
  visita-inordine(T.left())
  Visita T
  visita-inordine(T.right())
}
```

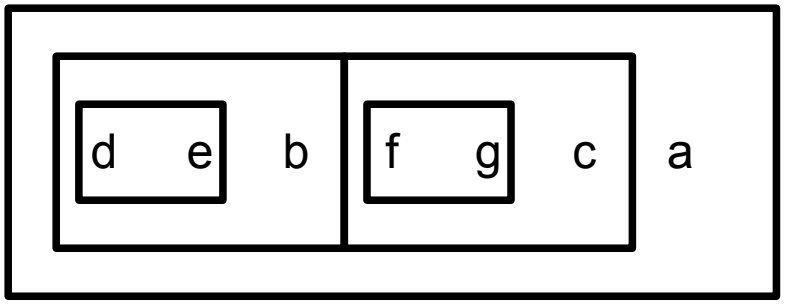




Visita alberi binari in profondità post-ordine

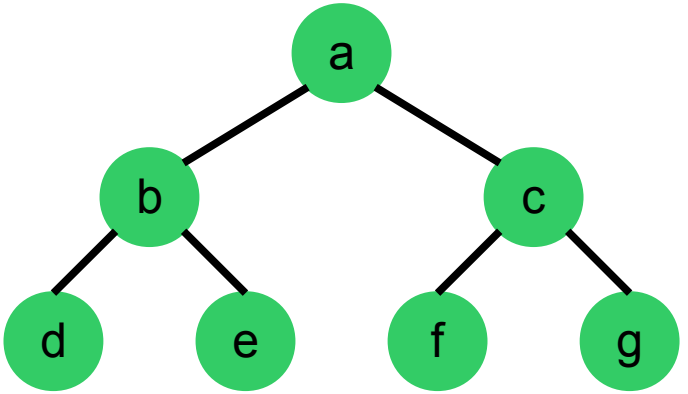
```
Algoritmo visita-postordine(T)
if ( T ≠ null ) {
  visita-postordine(T.left())
  visita-postordine(T.right())
  Visita T
}
```

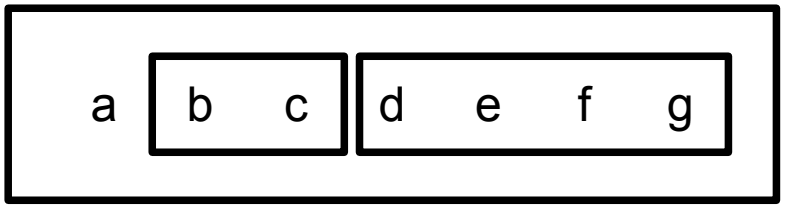




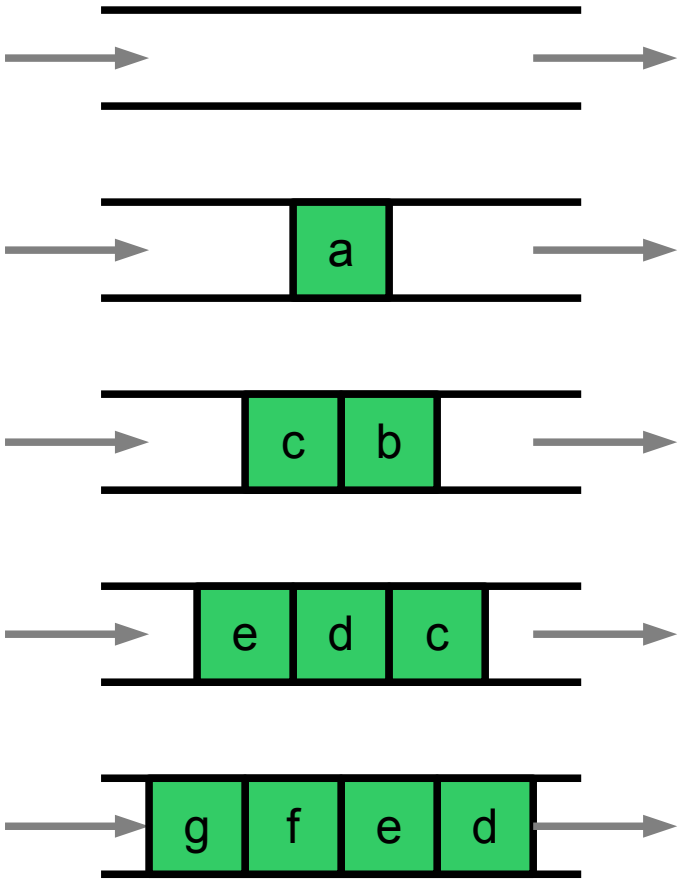
Visita alberi binari: in ampiezza

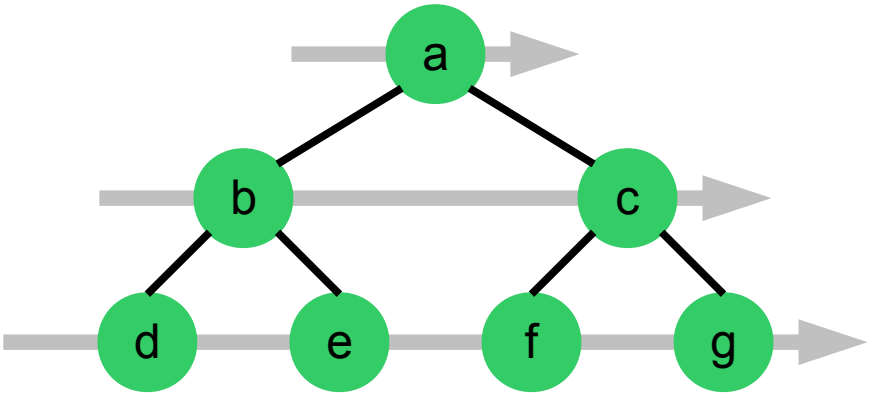
```
Algoritmo visita-ampiezza(T)
q = new Queue()
q.insert(T)
while ( !q.empty() ) {
  p := q.dequeue()
  visita p
  if ( p.legt() != null ) then
    q.enqueue(p.left());
  endif
  if ( p.right() != null) then
    q.enqueue(p.right())
  endif
}
```



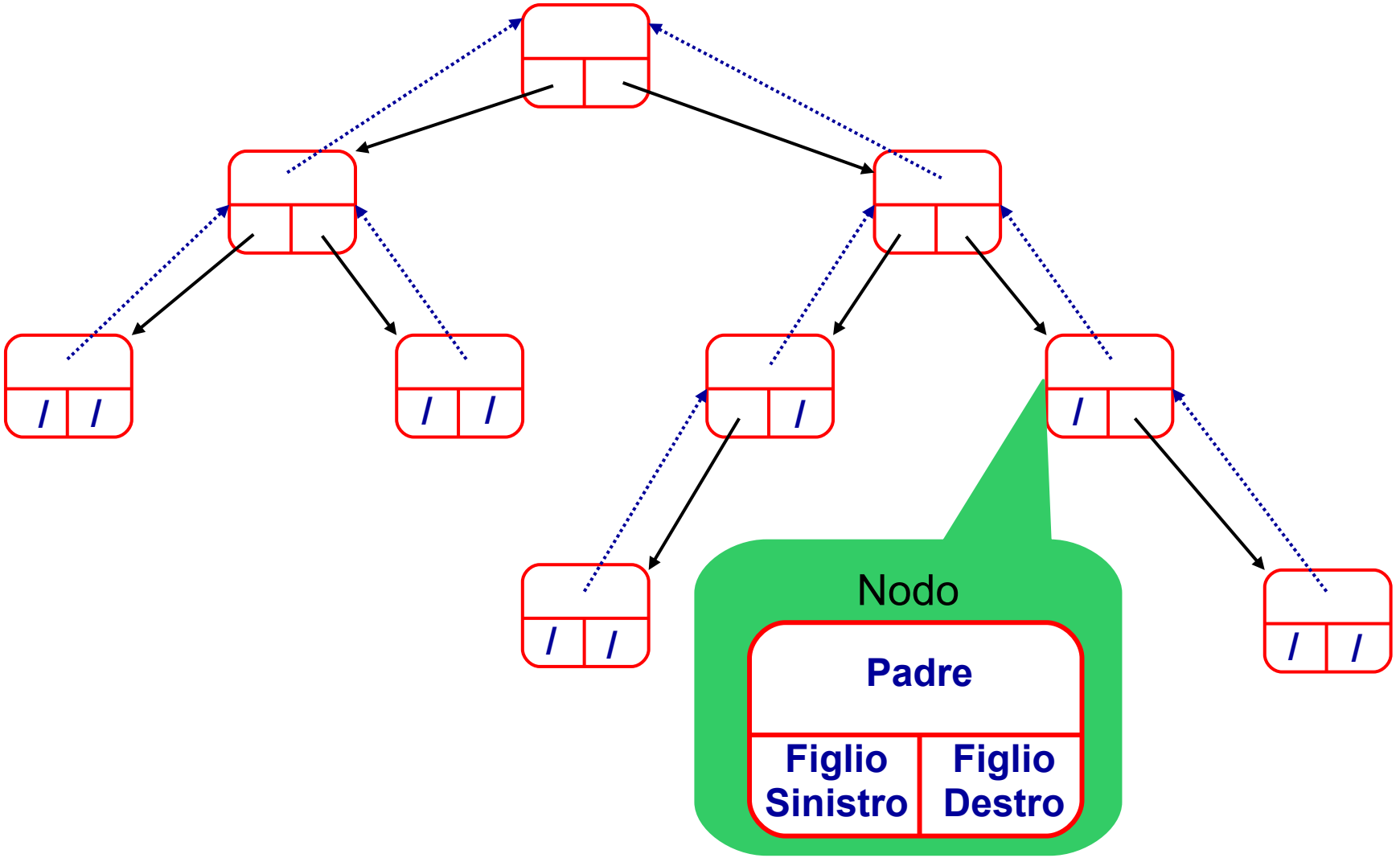


Visita alberi binari: in ampiezza





Implementazione di alberi binari
(strutture con puntatori)

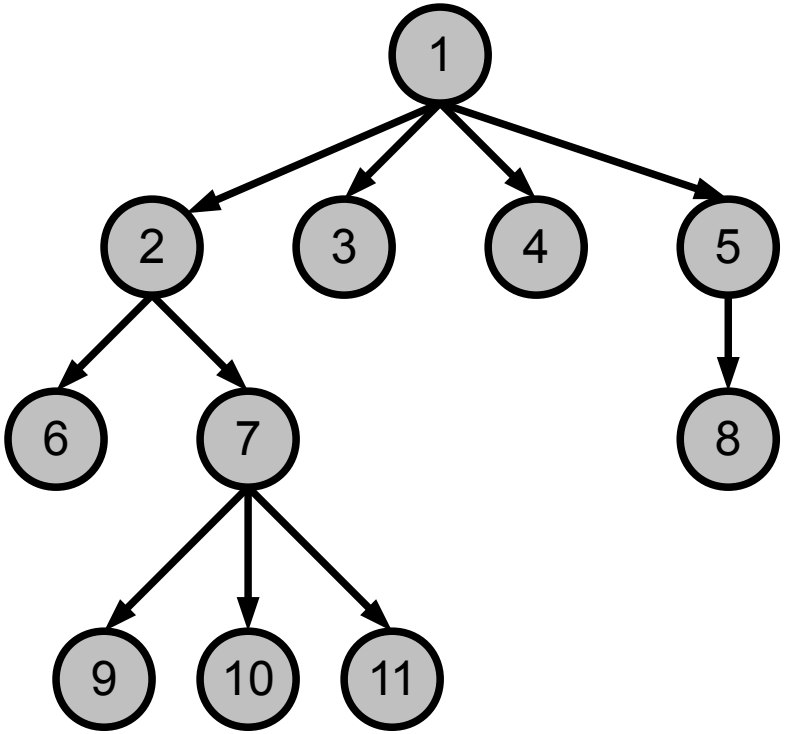


Alcune operazioni sugli alberi binari conteggio dei nodi

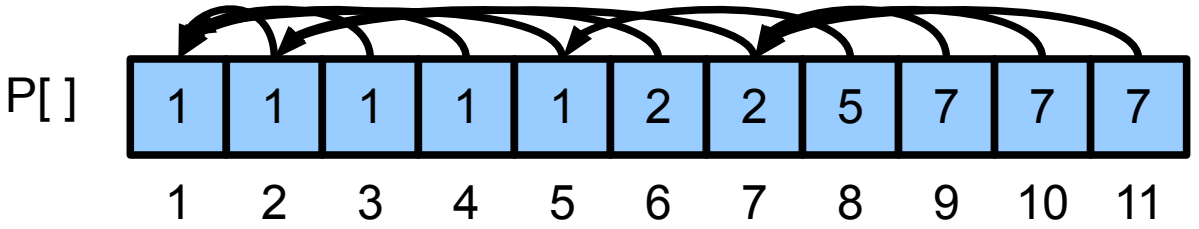
```
Algoritmo numNodi(T)
  if (T == null) then
    return 0;
  else
    return 1 + numNodi(T.left()) + numNodi(T.right());
  endif
```

- Quale è il costo computazionale di numNodi() ?
- È possibile modificare le strutture dati affinché numNodi() richieda tempo O(1)?
  - Quale è l'impatto di tale modifica sulla complessità computazionale delle altre operazioni che è possibile effettuare su un albero binario (es, aggiungere una foglia, fondere o separare alberi, ecc.)?

Implementazione di alberi generali:
vettore padri



- I nodi sono numerati da 1 a n
- L'albero è rappresentato da un vettore P, ove P[i] indica il padre del nodo i
- Per convenzione, si indica come padre della radice la radice stessa



Implementazione d-alberi:
vettore posizionale

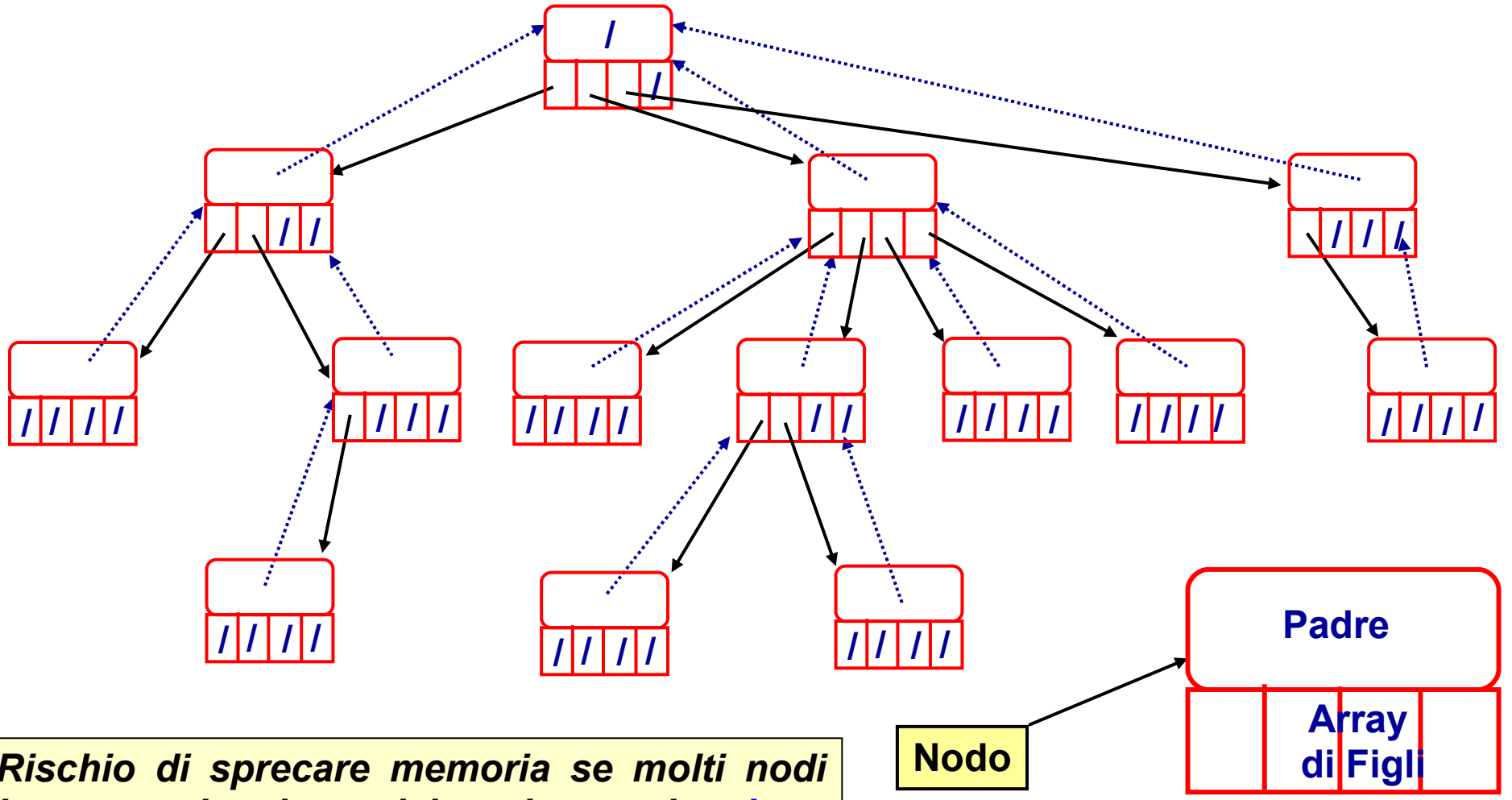
Sia T un albero d-ario di n nodi, numerati da 0 a n-1.

Un vettore posizionale è un array A di dimensione n (con le celle numerate da 0 a n-1) tale che A[i] contiene l'informazione associata al nodo i.

I figli del nodo i: i nodi d•i + k con k=1,...,d.

Dato il nodo i, con i ≠ 0, Parent(i) = $\lfloor (i-1)/d \rfloor$

Implementazione di alberi generali:
array di figli



Rischio di sprecare memoria se molti nodi hanno grado minore del grado massimo k.

Implementazione di alberi generali:
nodo fratello