Tecniche di analisi degli algoritmi

Damiano Macedonio
mace@unive.it

Algoritmi e Strutture Dati, A.A. 2012/13

27 ottobre 2012

Modello di calcolo: Architettura di von Neumann

Macchina a registri:

- Esiste un dispositivo di input e un dispositivo di output;
- La macchina ha una memoria composta da N locazioni, con indirizzo da 1 a N; ciascuna locazione di memoria può contenere un qualsiasi valore intero o reale;
- l'accesso in lettura o scrittura ad una qualsiasi locazione richiede tempo costante;
- La macchina dispone di un set di registri per mantenere i parametri necessari alle operazioni elementari e per il puntatore all'istruzione corrente;
- Il programma è composto da un insieme finito di istruzioni

Limitazioni del modello:

- Assumiamo che la macchina possa manipolare in tempo costante valori di dimensione arbitraria.
- Adottiamo una visione piatta della memoria.

Complessità computazionale

Definizione

Indichiamo con $f(n)$ la quantità di risorse (tempo di esecuzione, oppure occupazione di memoria) richiesta da un algoritmo su input di dimensione n, operante su una macchina a registri.

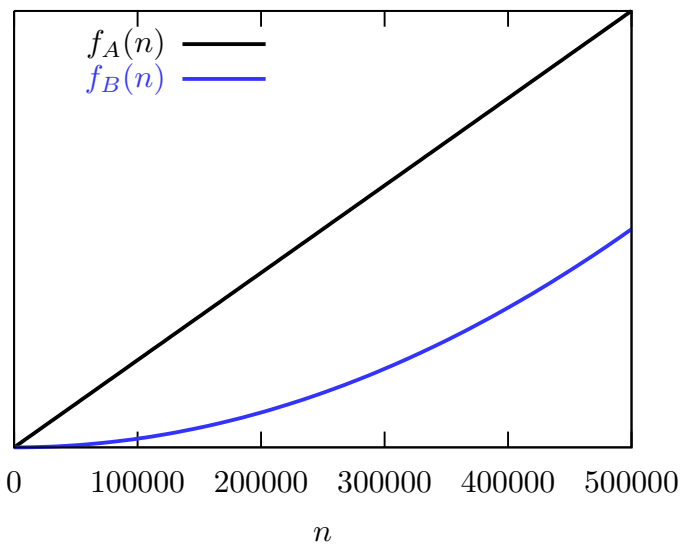
Siamo interessati a studiare l'*ordine di grandezza* di $f(n)$ ignorando le costanti moltiplicative e termini di ordine inferiore.

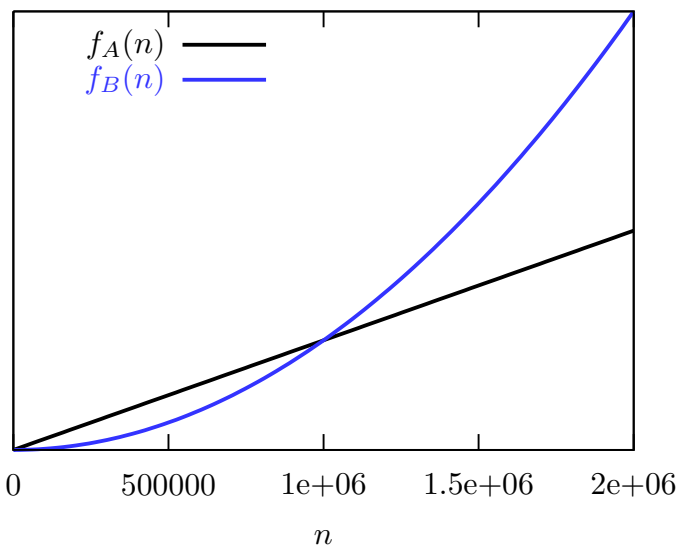
Complessià computazionale
Esempio

Consideriamo due algoritmi A e B che risolvono lo stesso problema.

- Sia $f_A(n) = 10^3 n$ la complessià computazionale di A;
- Sia $f_B(n) = 10^{-3} n^2$ la complessità computazionale di B.

Quale dei due è preferibile?





La notazione asintotica $O(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $O(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ g(n) \leq cf(n)$$

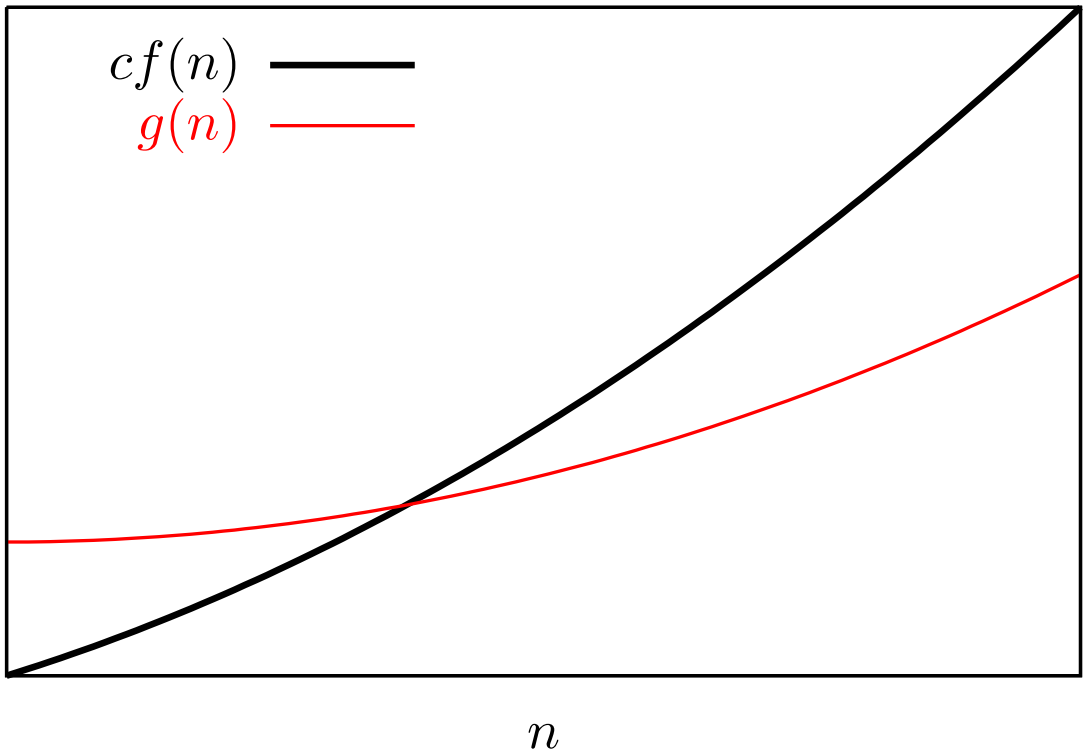
In maniera piú sintetica:

$$O(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \leq cf(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione (sebbene non formalmente corretta) $g(n) = O(f(n))$ per indicare $g(n) \in O(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = O(f(n))$$



Esempio

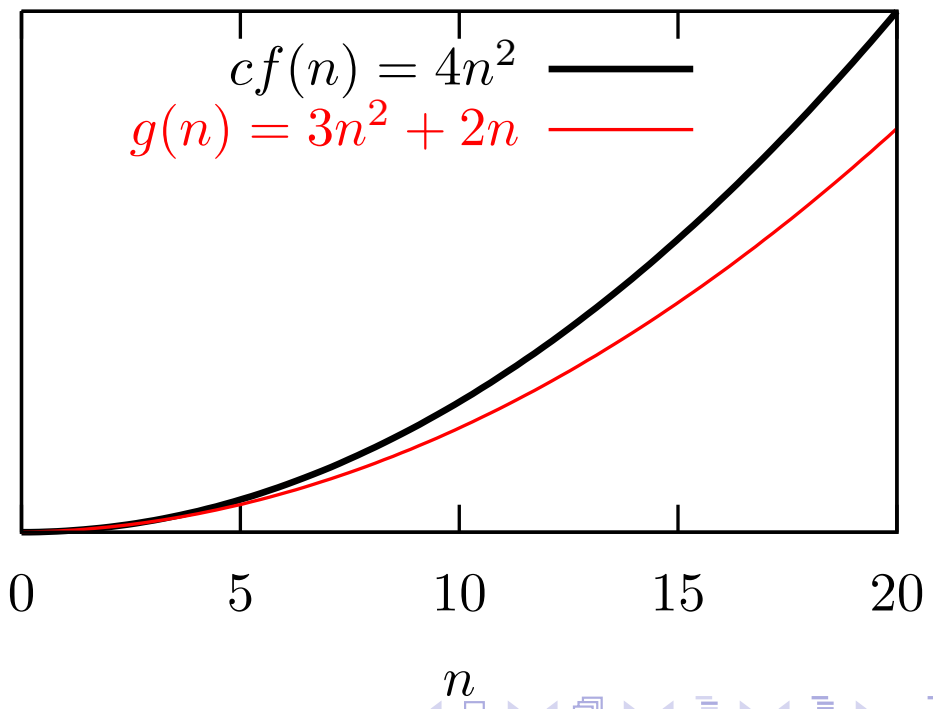
Sia $g(n) = 3n^2 + 2n$ e $f(n) = n^2$. Dimostriamo che $g(n) = O(f(n))$.

Dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tali che $g(n) \leq cf(n)$ per ogni $n \geq n_0$, ossia:

$$3n^2 + 2n \leq cn^2 \tag{1}$$

$$c \geq \frac{3n^2 + 2n}{n^2} = 3 + \frac{2}{n}$$

se ad esempio scegliamo $n_0 = 10$ e $c = 4$, si ha che la relazione (1) è verificata.



La notazione asintotica $\Omega(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $\Omega(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ g(n) \geq cf(n)$$

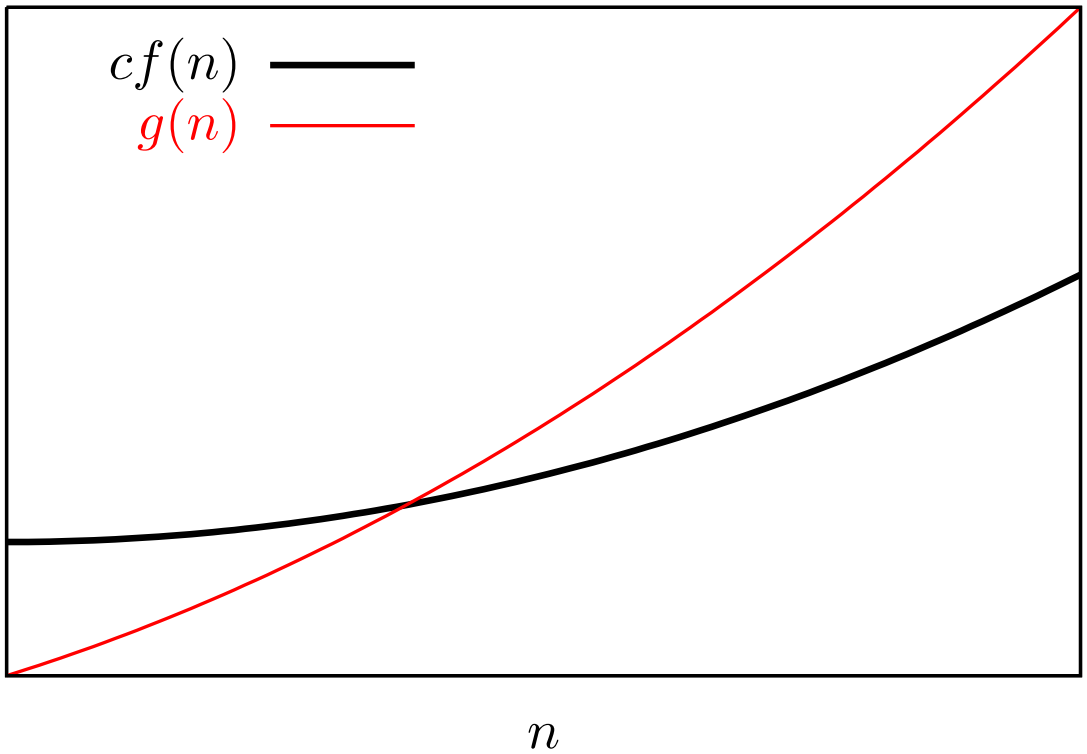
In maniera piú sintetica:

$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \ : \ \exists c > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : g(n) \geq cf(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione $g(n) = \Omega(f(n))$ per indicare $g(n) \in \Omega(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = \Omega(f(n))$$



Esempio

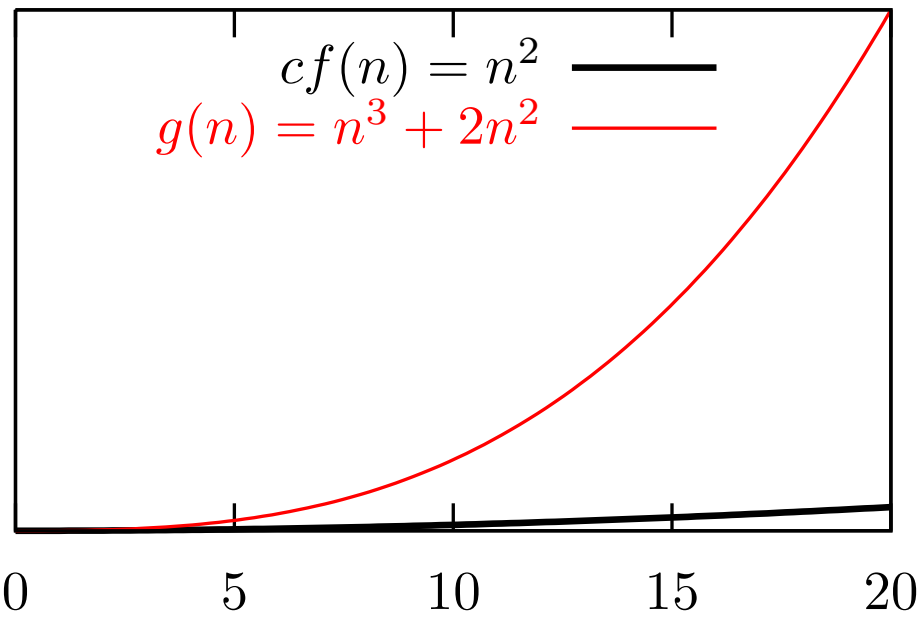
Sia $g(n) = n^3 + 2n^2$ e $f(n) = n^2$, e dimostriamo che $g(n) = \Omega(f(n))$.

Dobbiamo trovare due costanti $c > 0, n_0 \geq 0$ tali che per ogni $n \geq n_0$ sia $g(n) \geq cf(n)$, ossia:

$$n^3 + 2n^2 \geq cn^2 \tag{2}$$

$$c \leq \frac{n^3 + 2n^2}{n^2} = n + 2$$

se ad esempio scegliamo $n_0 = 0$ e $c = 1$, si ha che la relazione (2) è verificata.



La notazione asintotica $\Theta(f(n))$

Definizione

Data una funzione costo $f(n)$, definiamo l'insieme $\Theta(f(n))$ come l'insieme delle funzioni $g(n)$ per le quali esistono costanti $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $n_0 \geq 0$ per cui vale:

$$\forall n \geq n_0 \ : \ c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$$

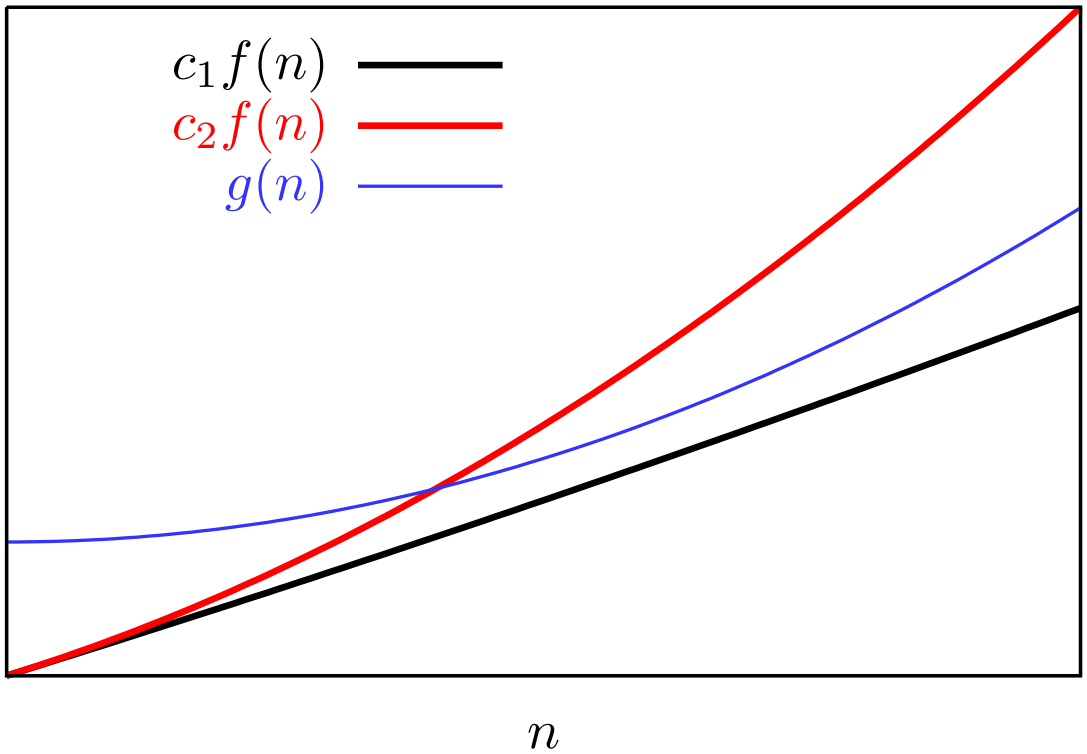
In maniera piú sintetica:

$$\Theta(f(n)) = \{g(n) \ : \exists c_1 > 0, c_2 > 0, n_0 \geq 0 \text{ tali che } \forall n \geq n_0 : c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)\}$$

Nota: si utilizza la notazione $g(n) = \Theta(f(n))$ per indicare $g(n) \in \Theta(f(n))$.

Rappresentazione grafica

$$g(n) = \Theta(f(n))$$



Alcune proprietà delle notazioni asintotica

Dualità

$g(n) = \Theta(f(n))$ se e solo se $g(n) = \Omega(g(n))$ e $g(n) = O(g(n))$

Simmetria

$g(n) = \Theta(f(n))$ se e solo se $f(n) = \Theta(g(n))$

Simmetria Trasposta

$g(n) = O(f(n))$ se e solo se $f(n) = \Omega(g(n))$

Transitività

Se $g(n) = O(f(n))$ e $f(n) = O(h(n))$, allora $g(n) = O(h(n))$.
Lo stesso vale per Ω e Θ.

Un metodo di verifica

Teorema

Siano $f(n)$ e $g(n)$ funzioni positive:

1. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ *allora* $f(n) = \Omega(g(n))$
   o, equivalentemente, $g(n) = O(f(n))$.

2. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ *allora* $f(n) = O(g(n))$
   o, equivalentemente, $g(n) = \Omega(f(n))$.

3. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l \neq 0$ *allora* $f(n) = \Theta(g(n))$
   o, equivalentemente, $g(n) = \Theta(f(n))$.

Ordini di grandezza

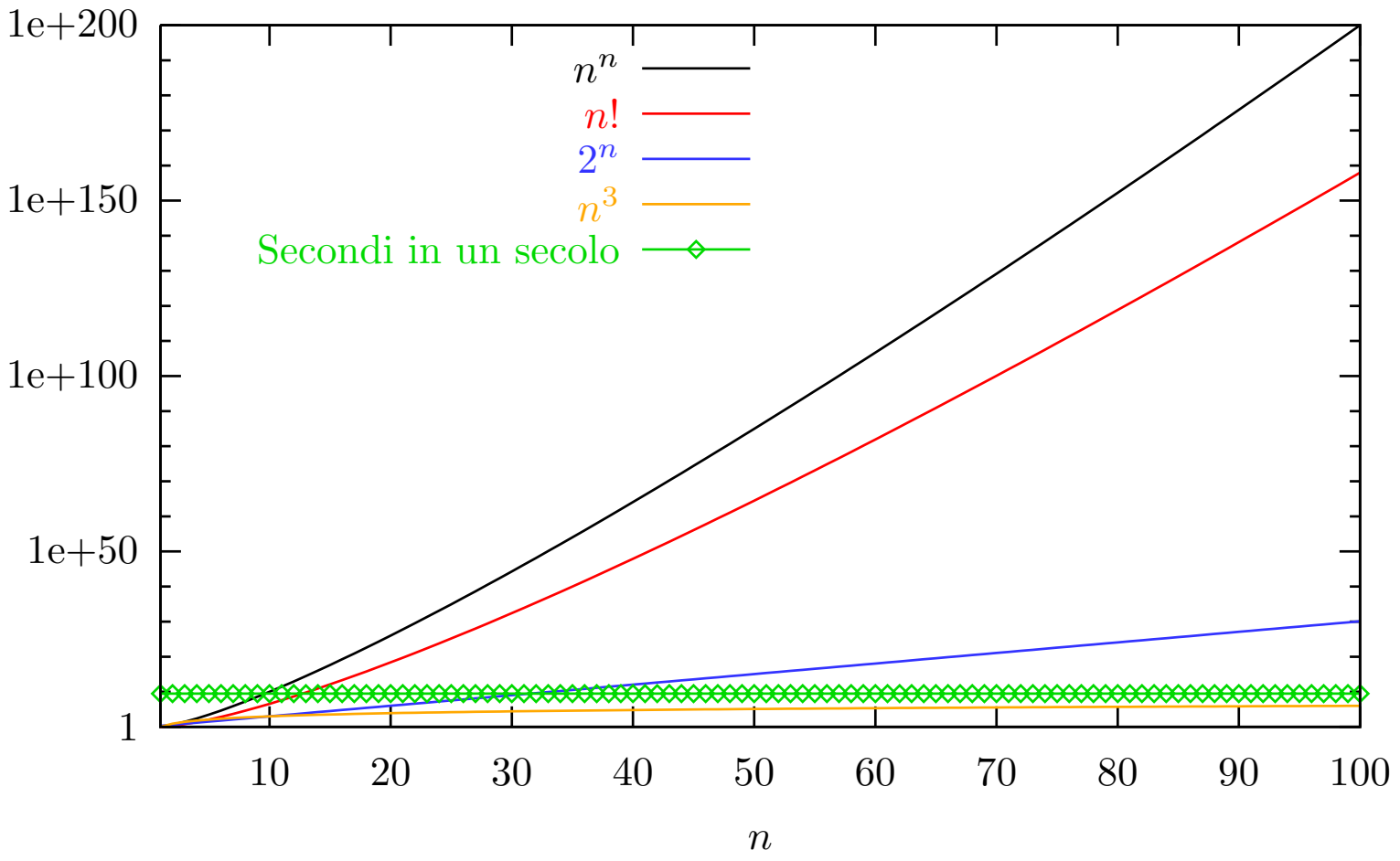
In ordine di complessità crescente:

	Ordine	**Esempio**
$O(1)$	costante	Determinare se un numero è pari
$O(\log n)$	logaritmico	Ricerca di un elemento in un array ordinato
$O(n)$	lineare	Ricerca di un elemento in un array disordinato
$O(n \log n)$	pseudolineare	Ordinamento mediante Merge Sort
$O(n^2)$	quadratico	Ordinamento mediante Bubble Sort
$O(n^3)$	cubico	Prodotto di due matrixi $n \times n$ con definizione
$O(c^n)$	esponenziale, base $c > 1$	
$O(n!)$	fattoriale	Determinante con espansione dei minori
$O(n^n)$	esponenziale, base n	

In generale:

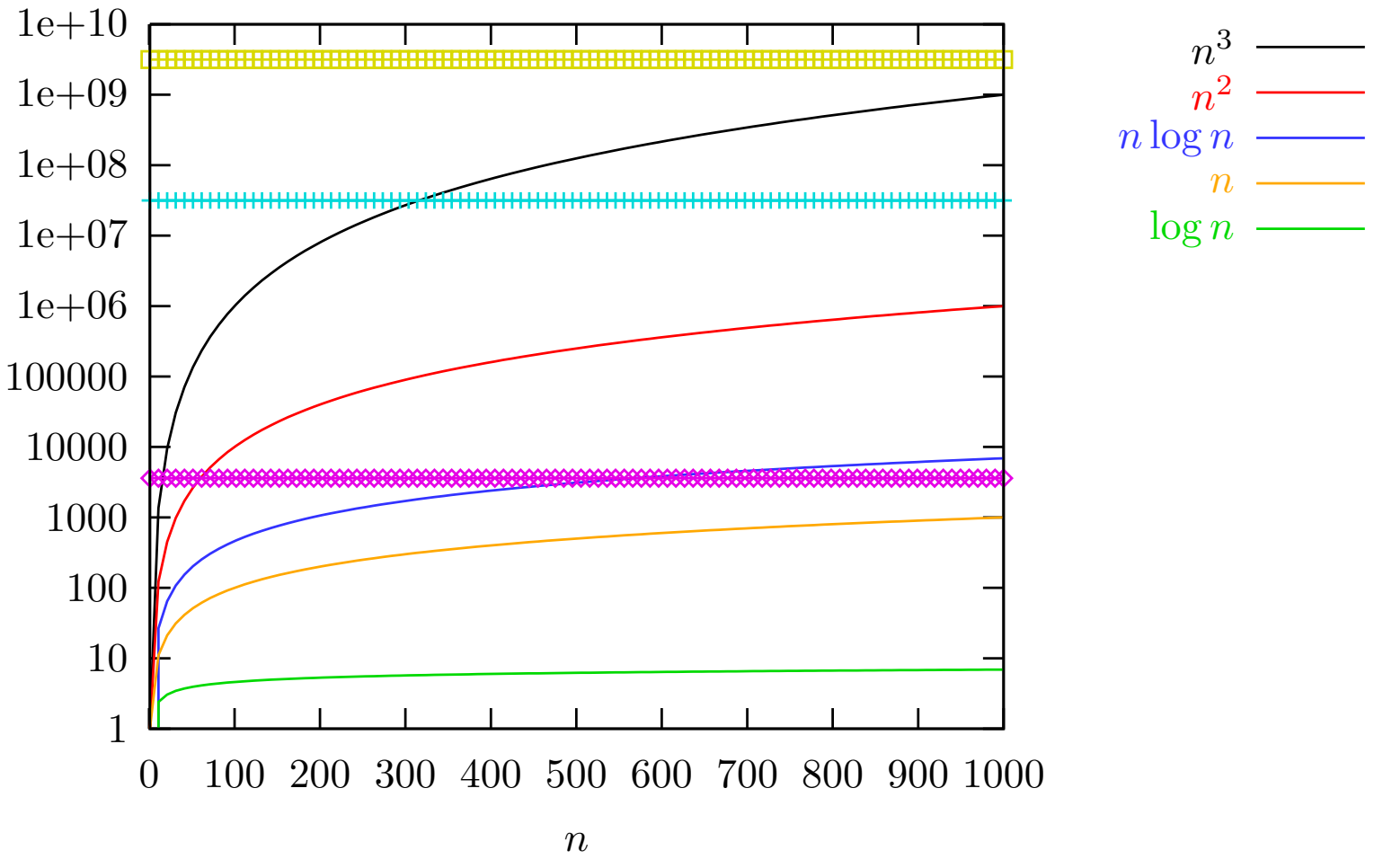
- $O(n^k)$ con $k > 0$ è ordine polinomiale
- $O(c^n)$ con $c > 1$ è ordine esponenziale

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



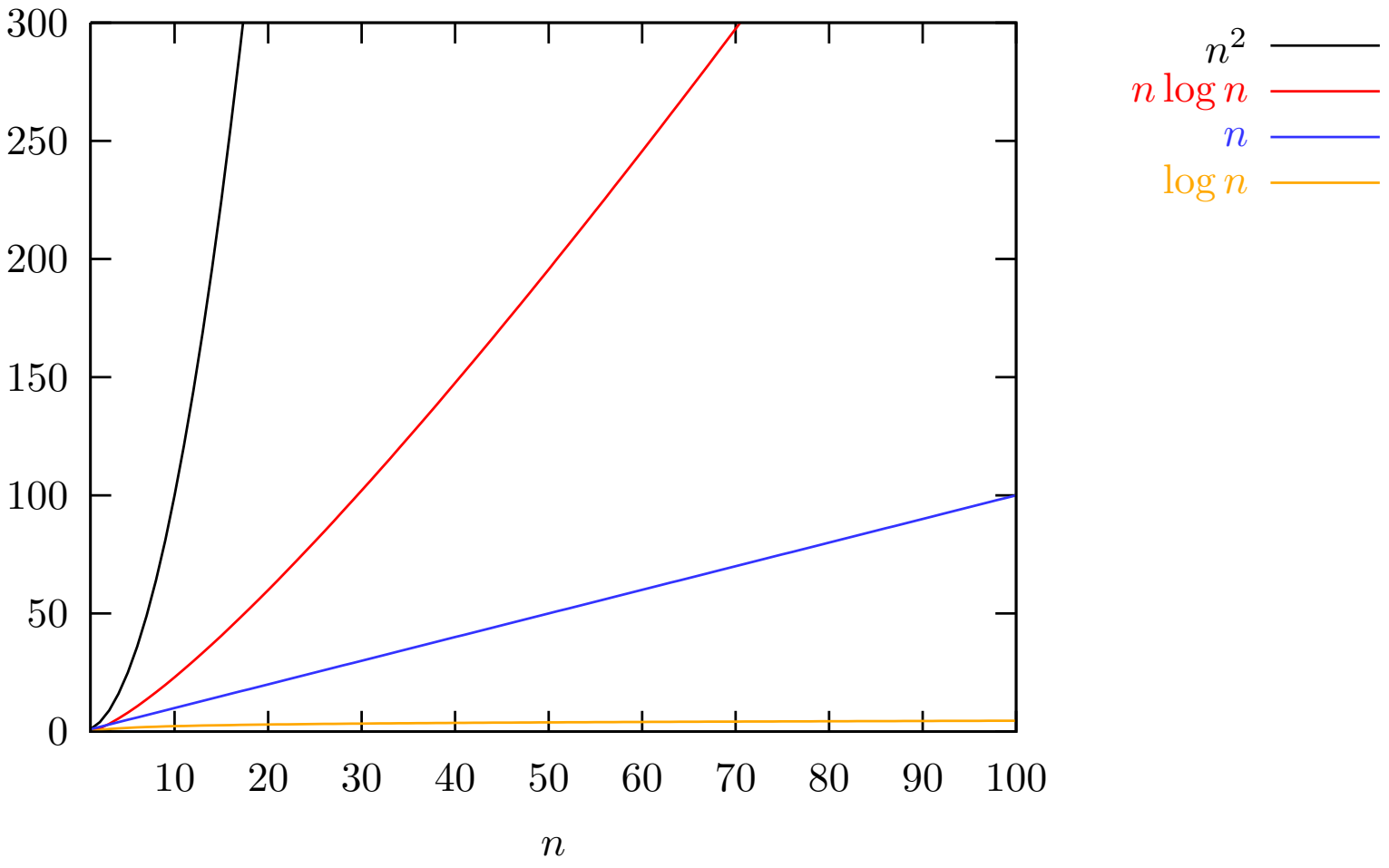
Nota: scala *y* logaritmica!

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



Nota: scala *y* logaritmica; le linee orizzontali segnano il numero di secondi in un'ora, in un anno e in un secolo (rispettivamente, dal basso verso l'alto)

Confronto grafico tra gli ordini di grandezza



Domande

- Dimostrare che $n \log n = O(n^2)$;
- Dove collochereste $O(\sqrt{n})$ nella tabella degli ordini di grandezza? Perché?
- Dimostrare che, per ogni $\alpha > 0$, $\log n = O(n^\alpha)$.
  Suggerimento: che cosa potete dire di $\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$?
- Dimostrare che, per ogni $a, b > 1$, vale $\log_a n = \Theta(\log_b n)$
  Suggerimento: ricordate la regola del cambio di base, $\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$

Vero o falso?

$6n^2 = \Omega(n^3)$?

Sia $F(n) = 6n^2$. Dobbiamo dimostrare se

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0 \ : \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \geq cn^3$$

Cioè $c \leq 6/n$.

Fissato c è sempre possibile scegliere un valore di n sufficientemente grande tale che $6/n < c$, per cui l'affermazione è falsa. □

Vero o falso?

$10n^3 + 2n^2 + 7 = O(n^3)$?

Sia $f(n) = 10n^3 + 2n^2 + 7$. Dobbiamo dimostrare se

$$\exists c > 0, n_0 \geq 0 \ : \ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq cn^3$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(n) &= 10n^3 + 2n^2 + 7 \\ &\leq 10n^3 + 2n^3 + 7n^3 \qquad (\text{se } n \geq 1) \\ &\leq 19n^3 \end{aligned}$$

Quindi la disuguaglianza è verificata ponendo $n_0 = 1$ e $c = 19$. □

Costo di esecuzione

Definizione

Un algoritmo $\mathcal{A}$ ha costo di esecuzione $O(f(n))$ su istanze di ingresso di dimensione n rispetto ad una certa risorsa di calcolo se la quantitá r di risorsa sufficiente per eseguire $\mathcal{A}$ su una qualunque istanza di dimensione n verifica la relazione $r(n) = O(f(n))$.

Definizione

Un algoritmo $\mathcal{A}$ ha costo di esecuzione $\Omega(f(n))$ su istanze di dimensione n e rispetto ad una certa risorsa di calcolo, se la massima quantità r di risorsa necessaria per eseguire $\mathcal{A}$ su istanze di dimensione n verifica la relazione $r(n) = \Omega(f(n))$.

Nota. Risorsa di calcolo per noi significa tempo di esecuzione oppure occupazione di memoria.

Complessitá dei problemi

Definizione

Un problema $\mathcal{P}$ ha complessità $O(f(n))$ rispetto ad una data risorsa di calcolo se esiste un algoritmo che risolve $\mathcal{P}$ il cui costo di esecuzione rispetto a quella risorsa è $O(f(n))$.

Definizione

Un problema $\mathcal{P}$ ha complessità $\Omega(f(n))$ rispetto ad una data risorsa di calcolo se ogni algoritmo che risolve $\mathcal{P}$ ha costo di esecuzione $\Omega(f(n))$ rispetto a quella risorsa.

Definizione

Dato un problema $\mathcal{P}$ con complessità $\Omega(f(n))$ rispetto ad una data risorsa di calcolo, un algoritmo che risolve $\mathcal{P}$ è ottimo se ha costo di esecuzione $O(f(n))$ rispetto a quella risorsa.

Analisi nel caso ottimo, pessimo e medio

Sia $\mathcal{I}_n$ l'insieme di tutte le possibili *istanze di input* di lunghezza n. Sia $T(I)$ il tempo di esecuzione dell'algoritmo sull'istanza $I \in \mathcal{I}_n$.

- La complessità nel caso pessimo (*worst case*) è definita come

$$T_{\text{worst}}(n) = \max_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$$

- La complessità nel caso ottimo (*best case*) è definita come

$$T_{\text{best}}(n) = \min_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)$$

- La complessità nel caso medio (*average case*) è definita come

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} T(I)P(I)$$

dove $P(I)$ è la probabilità che l'istanza I si presenti.

Qualche formula utile...

Definizione

$\lfloor x \rfloor$ = *parte intera di x, arrotondata per difetto*
$\lceil x \rceil$ = *parte intera di x, arrotondata per eccesso*

Proprietà

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \textit{serie aritmetica}$$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \qquad \textit{serie geometrica di ragione } q \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1}+2 \qquad \textit{serie aritmetica-geometrica}$$

Analisi di algoritmi non ricorsivi

Dato l'array A, ricerca il valore minimo contenuto in $A[i], A[i+1] \ldots A[j]$

algoritmo `minimo` (*array A, indici* i, j) $\rightarrow$ *elemento*

```
// Precondizione: i≤j (insieme non vuoto!)
min=i; // Posizione dell'elemento minimo
for k=i+1 to j do
    if ( A[k]<A[min] )
        then min = k
return A[min]
```

Analisi

- Il corpo del ciclo viene eseguito $j - i$ volte, qualunque sia l'istanza;
- Ogni iterazione ha costo $O(1)$ (vengono eseguite solo istruzioni elementari).
- Il costo di esecuzione della funzione `minimo` rispetto al tempo è quindi $\Theta(j - i)$.
- Sia n la lunghezza del vettore A. La chiamata `minimo`$(A, 1, n)$ ha tempo di esecuzione $\Theta(n)$.

Osservazione

Utilizzando gli ordini di grandezza, ogni operazione elementare ha complessità $O(1)$; un contributo diverso viene dalle istruzioni condizionali e iterative.

```
if (F_test)
    then
        F_true
    else
        F_false
```

Supponendo:

- F_test $= O(f(n))$
- F_true $= O(g(n))$
- F_false $= O(h(n))$

Allora il costo di esecuzione del blocco if-then-else è

$$O(\max\{f(n), g(n), h(n)\})$$

Esempio
Un algoritmo iterativo di ordinamento

algoritmo `selectionSort` (*array A*)

```
for i=1 to A.length
    m = minimo( A, i, A.length )
    tmp = A[i];
    A[i] = A[m];
    A[m] = tmp;
```

- Sia A array di dimensione n.
- La chiamata `minimo(A,i,A.length)` individua l'elemento minimo tra $A[i], A[i+1], \ldots A[n]$ in tempo $\Theta(n-i)$.
- L'operazione di scambio ha costo $O(1)$ in tempo di esecuzione;
- Il corpo del ciclo **for** viene eseguito $n-1$ volte.

Il tempo di esecuzione dell'intera procedura `selectionSort` è:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1) - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

che è $\Theta(n^2)$.

Ricerca sequenziale

algoritmo `linearSearch` (*elemento a, array A*)$\rightarrow$ *indice*

```
// Trova l'indice della prima occorrenza del valore a nel vettore A.
// Ritorna 0 se il valore a non e' presente.
for i=1 to A.length do
    if ( A[i]==a )
       then
          return i
       else
          i = i+1
return 0
```

- Nel caso ottimo l'elemento è all'inizio della lista, e viene trovato alla prima iterazione. Quindi $T_{\text{best}}(n) = O(1)$
- Nel caso pessimo l'elemento non è presente nella lista (oppure è presente nell'ultima posizione). In tal caso si itera su tutti gli elementi. Quindi $T_{\text{worst}}(n) = O(n)$
- . . . E nel caso medio?

Ricerca sequenziale
Analisi del caso medio

Non avendo informazioni sulla probabilità con cui si presentano i valori nella lista, dobbiamo fare delle ipotesi semplificative.

Assumiamo che l'elemento cercato sia sempre presente.

Assumiamo che, dato un vettore di n elementi, la probabilità P_i che l'elemento cercato si trovi in posizione i ($i = 1, 2, \ldots n$) sia $P_i = 1/n$, per ogni i.

Osserviamo che il tempo $T(i)$ necessario per individuare l'elemento nella posizione i-esima è $T(i) = i$.

Quindi possiamo concludere che:

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot T(i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = O(n)$$

Analisi di algoritmi ricorsivi
Ricerca di un elemento in un array ordinato

algoritmo `binarySearch` (*elemento a, array A, indici i, j*)$\rightarrow$ *indice*

```
// Precondizione: A ordinato in senso crescente.
// Trova un'occorrenza di a in A[i],A[i+1],... A[j].
// Ritorna 0 se il valore a non e' presente
if ( i>j )
   then
      return 0
   else
      m = (i+j)/2
      if ( A[m] == a )
         then
            return m
         else
            if ( A[m] > a )
               then
                  return binarySearch( a, A, i, m-1 )
               else
                  return binarySearch( a, A, m+1, j )
```

Per cercare l'elemento *a* in un array *A* di *n* elementi invochiamo `binarySearch` (*a*, *A*, 1, *n*)

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Sia $T(n)$ il tempo di esecuzione della funzione `binarySearch` su una porzione di $n = j - i + 1$ elementi del vettore A.

In generale $T(n)$ dipende non solo dal numero di elementi su cui fare la ricerca, ma anche dalla posizione dell'elemento cercato (oppure dal fatto che l'elemento non sia presente).

- Nell'ipotesi più favorevole (caso ottimo) l'elemento cercato è proprio quello che occupa posizione centrale; in tal caso $T(n) = O(1)$.
- Nel caso meno favorevole (caso pessimo) l'elemento cercato non esiste (o viene trovato su una porzione di array di dimensione 1). Quanto vale $T(n)$ in tale situazione?

Analisi dell'algoritmo di ricerca binaria

Metodo dell'iterazione

Possiamo definire $T(n)$ per ricorrenza, come segue.

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n = 0 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + c_2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Il metodo dell'iterazione consiste nello sviluppare l'equazione di ricorrenza, per intuirne la soluzione:

$$\begin{array}{rcll} T(n) & = & T(n/2) + c_2 & = T(n/2) + c_2 \\ & = & (\, T(n/4) + c_2 \,) + c_2 & = T(n/4) + 2c_2 \\ & = & (\, (\, T(n/8) + c_2 \,) + c_2 \,) + c_2 & = T(n/8) + 3c_2 \\ & \vdots & & \\ & = & \ldots & = T(n/2^i) + i \cdot c_2 \end{array}$$

Supponendo che n sia una potenza di 2, ci fermiamo quando $n/2^i = 1$, ossia $i = \log n$. Alla fine abbiamo

$$T(n) = c_1 + c_2 \log n = O(\log n)$$

Verificare equazioni di ricorrenza

Metodo della sostituzione

Consiste nell'applicare il principio di induzione per verificare la soluzione di una equazione di ricorrenza.

Esempio Dimostrare che $T(n) = O(n)$ è soluzione di

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Dimostrazione Per induzione, verifichiamo che $T(n) \leq cn$ per n sufficientemente grande.

- Caso base: $T(1) = 1 \leq cn$ se $c \geq 1/n$. Basta scegliere ad esempio $c \geq 2$ e questa relazione è verificata per qualsiasi n;
- Induzione:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq c\lfloor n/2 \rfloor + n \qquad \text{(ipotesi induttiva)} \\ &\leq cn/2 + n = (c/2 + 1)n = f(c)n \end{aligned}$$

La dimostrazione del passo induttivo funziona quando $f(c) \leq c$, ossia $c \geq 2$.

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci

Ricordiamo la definizione della sequenza di Fibonacci:

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Consideriamo nuovamente il tempo di esecuzione dell'algoritmo ricorsivo banale per calcolare F_n, il cui tempo di esecuzione $T(n)$ soddisfa la relazione di ricorrenza

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{se } n \leq 2 \\ T(n-1) + T(n-2) + c_2 & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

Vogliamo produrre un limite inferiore e superiore a $T(n)$

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci–limite superiore

Limite superiore. Sfruttiamo il fatto che $T(n)$ è una funzione non decrescente ($T(n-2) \leq T(n-1)$):

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c_2 \\
&\leq 2T(n-1) + c_2 \\
&\leq 2(\,2T(n-2) + c_2\,) + c_2 && \text{maggioro } T(n-1) \\
&\leq 2(\,2(\,2T(n-3) + c_2\,) + c_2\,) + c_2 && \text{maggioro } T(n-2) \\
&\leq 2(\,2(\,2(\,2T(n-4) + c_2\,) + c_2\,) + c_2\,) + c_2 && \text{maggioro } T(n-3) \\
&\vdots \\
&\leq 2^k T(n-k) + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot c_2 \\
&\vdots \\
&\leq 2^n c_1 + \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} 2^i \cdot c_2 \;=\; 2^n c_1 + c_2 \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}
\end{aligned}
$$

Quindi $T(n) = O(2^n)$.

Analisi di algoritmi ricorsivi
Numeri di Fibonacci–limite inferiore

Limite inferiore. Sfruttiamo ancora il fatto che $T(n)$ è una funzione non decrescente ($T(n-1) \geq T(n-2)$):

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + T(n-2) + c_2 \\
&\geq 2T(n-2) + c_2 \\
&\geq 2(\,2T(n-4) + c_2\,) + c_2 && \text{minoro } T(n-2) \\
&\geq 2(\,2(\,2T(n-6) + c_2\,) + c_2\,) + c_2 && \text{minoro } T(n-4) \\
&\vdots \\
&\geq 2^k T(n-2k) + \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot c_2 \\
&\vdots \\
&\geq 2^{\lfloor n/2 \rfloor} c_1 + \textstyle\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} 2^i \cdot c_2 = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} c_1 + c_2 \dfrac{2^{\lfloor n/2 \rfloor} - 1}{2-1}
\end{aligned}
$$

Quindi $T(n) = \Omega(2^{\lfloor n/2 \rfloor})$.

Nota

Attenzione $2^{\lfloor n/2 \rfloor} = O(2^n)$, ma $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \neq \Theta(2^n)$. In altre parole, le due funzioni, pur essendo entrambi esponenziali, appartengono a classi di complessità differenti (Perché?).

Perché se fosse $2^{\lfloor n/2 \rfloor} = \Theta(2^n)$ allora dovremmo avere anche $2^{\lfloor n/2 \rfloor} = \Omega(2^n)$. Quindi dovrebbero esistere c ed n_0 tali che $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \geq c\,2^n$ per ogni $n \geq n_0$. Questo implica $2^{n/2} \geq c\,2^n$ per ogni $n \geq n_0$, ovvero

$$\frac{1}{2^{n/2}} \geq c \text{ per ogni } n \geq n_0$$

E questo è impossibile in quanto $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n/2}} = +\infty$ e quindi è impossibile trovare c ed n_0 che soddisfino la disuguaglianza.