6 Serie

6.1 Esercizio

Calcolare, se esiste,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

6.1.1 Risoluzione

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\right) = 1.$$

Per inciso,

$$0.\overline{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$$

6.2 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$$

è convergente.

6.2.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{1}{n-1/2} > \frac{1}{n}$$

e dunque la serie è maggiorante della serie armonica e quindi diverge.

6.3 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100}$$

è convergente.

6.3.1 Risoluzione

Si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$$
e il termine a destra diverge.

6.4 Esercizio

Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$
è convergente.

6.4.1 Risoluzione

Si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/2} > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$$
e dunque diverge.

6.5 Esercizio

Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
è convergente.

6.5.1 Risoluzione

Il termine generale è infinitesimo (esercizio), ma la serie non converge. La ridotta m-esima è $s_m = \sqrt{m+1} - 1$.

6.6 Esercizio

Dire se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^2}$$
è convergente.

6.6.1 Risoluzione

Si ha

$$0 \leq \frac{1 - \cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

e dunque la serie converge.

6.7 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

converge.

6.7.1 Risoluzione

Usando il criterio di asintoticità, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos(1/n)}{1/n^2} = \frac{1}{2}$$

(vedi Esercizio 4.17) e dunque la serie (a termini non negativi) converge perché converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

6.8 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

è convergente.

6.8.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice si vede subito la convergenza.

6.9 Esercizio

Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n}$$

converge.

6.9.1 Risoluzione

Per poter uare il criterio di Leibniz, basta verificare la descrescenza del modulo del termine generale. Si ha

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} < \frac{\log n}{n} \Leftrightarrow n\log(n{+}1) < (n{+}1)\log n \Leftrightarrow \log(n{+}1)^n < \log n^{n+1} \Leftrightarrow (n{+}1)^n < n^{n+1}$$

che è vero per $n > 2$ (vedi Esercizio 3.8).

6.10 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.10.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

per qualunque $x \in \mathbb{R}$. Dunque la serie converge per qualunque $x \in \mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\exp(x) = e^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

6.11 Esercizio

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin(2\pi \cdot e \cdot n!)$$

6.11.1 Risoluzione (traccia)

Si usi il fatto che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \ .$$

6.12 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.12.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\frac{n}{|x|^n} = \lim_{n\to+\infty}|x|\frac{n}{n+1} = |x|\,.$$

Dunque per $|x| < 1$ la serie converge assolutamente. Per $x < -1$ la serie diverge (a $-\infty$). Per $x > 1$ la serie non converge, perché il termine generale non è infinitesimo (e di segno alterno). Per $x = 1$, la serie diventa la serie armonica a termini di segno alterno (e dunque converge) e per $x = -1$ la serie diventa l'opposto della serie armonica (e dunque diverge a $-\infty$). Inoltre, per $-1 < x \leq 1$ si ha

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

(in particolare, la serie armonica a termini di segno alterno converge a $\log 2$).

6.13 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.13.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti è facile vedere che la serie converge assolutamente per $|x| < 1$. Poi se $|x| > 1$, la serie non converge (il termine generale non è infinitesimo e di segno alterno). Se $|x| = 1$ la serie converge per il criterio di Leibniz. Inoltre, per $|x| \leq 1$, si ha

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

e, in particolare,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

6.14 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.14.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\,|x|^n} = |x| \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = |x| \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{e}$$

e quindi la serie è assolutamente convergente se $|x| < e$. Se $x > e$ la serie diverge (perché il termine generale, positivo, non è infinitesimo) mentre se $x < -e$ non converge (perché il termine generale non è infinitesimo e di segno alterno). Se $|x| = e$, si ha $|a_{n+1}| > |a_n|$ (perché?) e dunque il termine generale non è infinitesimo e quindi la serie diverge se $x = e$ e non converge se $x = -e$.

6.15 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$$

6.15.1 Risoluzione

Poniamo $x_n = n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$: per quanto visto nell'Esercizio 6.14, si ha $x_{n+1} > x_n$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq q > 1$$

dunque il limite vale $+\infty$.

6.16 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.16.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice per la serie dei valori assoluti si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}} = \left(e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}\right)^{1/n} = e^{-\frac{nx}{n+x^2}}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-x}$$

e quindi la serie è assolutamente convergente per $x > 0$ e divergente (perché a termini positivi) per $x < 0$. Per $x = 0$, diverge.

6.17 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.17.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice per la serie dei valori assoluti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n |x|^n} = \lim_{n\to+\infty} n|x| = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e dunque se $x = 0$ la serie converge assolutamente, altrimenti diverge se $x > 0$ e non converge se $x < 0$.

6.18 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.18.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, è facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x+2| .$$

Dunque, la serie converge assolutamente per $|x+2| < 1$, diverge per $x+2 > 1$ e non converge per $x+2 < -1$. Se $x+2 = 1$, la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

e il suo termine generale è dello stesso ordine di $1/n$ per $n \to +\infty$ (esercizio) e dunque diverge. Se invece $x+2 = -1$, basta osservare che il termine generale è infinitesimo e che il suo valore assoluto è decrescente (basta osservare che il rapporto tra un termine e il successivo è maggiore di 1): dunque la serie converge per il criterio di Leibniz.

6.19 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{4^{n+1}e^n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.20 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{3}{2}}\right)(2x+11)^{2n+1}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.