

10 Integrali indefiniti

10.1 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{3x-1} dx$$

10.1.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{3x-1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3}{3x-1} dx = \frac{2}{3} \log |3x-1| + c$$

10.2 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x}{3x-1} dx$$

10.2.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x}{3x-1} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3x-1+1}{3x-1} dx = \frac{2}{3} \int 1 + \frac{1}{3x-1} dx = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \log |3x-1| + c$$

10.3 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6} dx$$

10.3.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{2}{x-3} + \frac{-2}{x-2} dx = 2 \log |x-3| - 2 \log |x-2| + c$$

10.4 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6} dx$$

10.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{13}{x-3} + \frac{-10}{x-2} dx = 13 \log|x-3| - 10 \log|x-2| + c$$

10.5 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4} dx$$

10.5.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{2}{(x-2)^2} dx = -\frac{2}{x-2} + c$$

10.6 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} dx$$

10.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2} dx = 2 \log|x-2| - \frac{7}{x-2} + c$$

10.7 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$$

10.7.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = \arctan(x+1) + c$$

10.8 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x + 6}{x^2 + 2x + 2} dx$$

10.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 6}{x^2 + 2x + 2} dx &= 3 \int \frac{x + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2(x + 1) + 2}{(x + 1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} + \frac{2}{(x + 1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \log(x^2 + 2x + 2) + 3 \arctan(x + 1) + c \end{aligned}$$

10.9 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{x^2 + x - 2}{(x^2 + 2x + 2)(x - 2)} dx$$

10.9.1 Risoluzione

Si esegue la scomposizione

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x^2 + 2x + 2)(x - 2)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

10.10 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

10.10.1 Risoluzione

Moltiplicare numeratore e denominatore per $\cos x$ e poi eseguire la sostituzione $y = \sin x$. Alternativamente, eseguire subito la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + c$$

10.11 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\sin x} dx$$

10.11.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

oppure eseguire la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\sin x = 2t/(1+t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \log \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + c$$

10.12 Esercizio

Calcolare

$$\int \cos^2 x dx$$

10.12.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Il risultato è

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

10.13 Esercizio

Calcolare

$$\int \sin^3 x dx$$

10.13.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$$

Il risultato è

$$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

10.14 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

10.14.1 Risoluzione

Eeguire la sostituzione $x = \sin y$ oppure $x = \cos y$. Spiegare l'apparente diversità dei risultati. Il risultato è

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + d$$

10.15 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

10.15.1 Risoluzione

Eeguire la sostituzione $\sqrt{x+1} = y$. Il risultato è

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x+1} + c$$

10.16 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

10.16.1 Risoluzione

Eeguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

10.17 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

10.17.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{2} + c$$

10.18 Esercizio

Calcolare

$$\int \log x dx$$

10.18.1 Risoluzione

Si ha $\log x = 1 \cdot \log x$ e si integra per parti. Il risultato è

$$\int \log x dx = x \log x - x + c$$

10.19 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

per parti.

10.19.1 Risoluzione

Si ha

$$\sqrt{1-x^2} = 1 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

10.20 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

per parti.

10.20.1 Risoluzione

Si ha

$$\sqrt{1+x^2} = 1 \cdot \sqrt{1+x^2}$$

e ci si serve dell'Esercizio 10.16.