7 Derivate

7.1 Esercizio

Calcolare la derivata di
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

7.1.1 Risoluzione

Si ha
$$f(x) = e^{x \log(1+1/x)}$$
e dunque
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \log(1+1/x)} \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) \end{aligned}$$

7.2 Esercizio

Calcolare la derivata di
$$f(x) = |x|$$

7.2.1 Risoluzione

Si ha $f(x) = x$ per $x \geq 0$ e $f(x) = -x$ per $x < 0$ e dunque
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & x \neq 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \end{cases}$$

7.3 Esercizio

Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cosa si può dire di $\mathrm{D}\,|f(x)|$?

7.3.1 Risoluzione

L'idea è che la derivata vale $\operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x)$. In realtà, occorre considerare separatamente in punti in cui $f(x) = 0$. Dunque si ha
$$\mathrm{D}\,|f(x)| = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x) & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \text{ e } f'(x) = 0 \\ \text{non esiste} & f(x) = 0 \text{ e } f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

7.4 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\ a \neq 1$$

7.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

e dunque

$$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

7.5 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log |x|$$

7.5.1 Risoluzione

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

7.6 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log(ax), \quad a > 0$$

7.6.1 Risoluzione

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

7.7 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

7.7.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}$. La derivata è

$$f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

che non esiste per $x = \pm 1$.

7.8 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

7.9 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

7.9.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}$ (perchè?). La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{2x^2+x^4}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2+x^2} \cdot (1+x^2)}$$

La derivata è definita per $x \neq 0$. Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \sqrt{2}, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\sqrt{2}$$

e dunque la derivata destra e la derivata sinistra esistono ma sono diverse, quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$.

7.10 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

7.10.1 Risoluzione

È facile verificare che $f(x)$ è una funzione continua (vedi Esercizio 6.6) e che $g(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ coincide con $f'(x)$ per $x \neq 0$. Per $x = 0$, si può considerare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)\sin\frac{1}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

che non esiste. Dunque $f(x)$ è derivabile per $x \neq 0$ e la sua derivata vale $g(x)$ (in particolare, $f'(x)$ è una funzione continua).

Osservando che $g(x)$ non è definita in $x = 0$ e che

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

non esiste, si poteva concludere che $f'(x)$ non esiste per $x = 0$? No, vedi l'Esercizio 7.11.

7.11 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

7.11.1 Risoluzione

È facile verificare che $f(x)$ è una funzione continua e che $g(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ (funzione non definita in $x = 0$ e che non ammette limite in $x = 0$) coincide con $f'(x)$ per $x \neq 0$. Per $x = 0$, si può considerare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2\sin\frac{1}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si noti che la derivata di $f(x)$ non è una funzione continua.

7.12 Esercizio

Discutere continuità, derivabilità e continuità della derivata per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

con α parametro reale non negativo.

7.13 Esercizio

Dimostrare che se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

allora $f'(x_0) = \ell$.

7.13.1 Risoluzione

Dal teorema del valor medio

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \ .$$

con ξ compreso tra x e x_0. Si conclude passando al limite per $x \to x_0$.

Da quanto visto nei tre esercizi precedenti, non è vero che se non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

allora non esiste $f'(x_0)$.

7.14 Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

è costante a tratti (vedi Esercizio 1.2)

7.14.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la derivata vale 0 in tutto il dominio. Dunque la funzione è costante in $\{x : x < 0\}$ e vale $f(-1) = -\pi/2$ e in $\{x : x > 0\}$ e vale $f(1) = \pi/2$.

7.15 Esercizio

Data la serie dipendente da $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

1. dimostrare che converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$;

2. dimostrare che coincide con la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

3. supponendo di sapere che la derivata di $\varphi(x)$ coincide con la derivata della serie (fatta termine a termine), dimostrare che la derivata della serie converge assolutamente per ogni x e che

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

7.15.1 Risoluzione

1. Facile (vedi Esercizio 6.10);

2. banale se $x = 0$, altrimenti basta osservare che

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1 \; ;$$

3. facile;

7.16 Esercizio

Calcolare, se esistono, le seguenti derivate:

- $D\left(\log(\log(\log x))\right)$
- $D\left(\log(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}})\right)$
- $D(x^n e^{\sin x})$, $n \in \mathbb{N}$

- $D\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right)$
- $D\left(e^{x^x}\right)$
- $D\left(x^{\log x}\right)$
- $D\left(\sin(x^{\log x})\right)$
- $D\left((\sin x)^{\cos x}\right)$