

# Equazioni di diffusione-trasporto-reazione

Bonazzoli Marcella

Università degli Studi di Verona

5 Giugno 2013

I processi fisici di diffusione, trasporto e reazione si possono modellare con problemi della forma seguente:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove  $\mu, \sigma, f$  e  $\mathbf{b}$  sono funzioni assegnate. Nel caso più generale supponiamo che  $\mu \in L^\infty(\Omega)$  con  $\mu(x) \geq \mu_0 > 0$ ,  $\sigma \in L^2(\Omega)$  con  $\sigma(x) \geq 0$  q.o.in  $\Omega$ ,  $\mathbf{b} \in [L^\infty(\Omega)]^2$  con  $\operatorname{div}(\mathbf{b}) \in L^2(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ .

In questa equazione

- $-\operatorname{div}(\mu \nabla u)$  è detto termine di **diffusione**
- $\mathbf{b} \cdot \nabla u$  è detto termine di **convettivo** o di **trasporto**
- $\sigma u$  è detto detto termine di **reazione**

In molte applicazioni pratiche il termine di diffusione è dominato dal termine convettivo o da quello di reazione.

In questi casi la soluzione può dar luogo a **strati limite**, cioè a regioni, generalmente in prossimità della frontiera di  $\Omega$ , in cui la soluzione è caratterizzata da forti gradienti.

Dunque ci occuperemo di:

- esistenza e unicità della soluzione del problema;
- difficoltà del metodo di Galerkin nel fornire soluzioni stabili in presenza di strati limite;
- metodi di discretizzazione alternativi per l'approssimazione del problema.

# Formulazione debole del problema

Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione per una funzione test  $v \in V = H_0^1(\Omega)$  e integrando su  $\Omega$ , otteniamo:

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla u) v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Poi, utilizzando la formula di Green (in cui l'ultimo integrale è nullo)

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mu \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, d\gamma,$$

se definiamo la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla u) v \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma u v \, d\Omega$$

la formulazione debole del problema diventa

$$\text{trovare } u \in V : \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

# Formulazione debole del problema

## Esistenza e unicità

Per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione vogliamo porci nelle condizioni di applicare il lemma di Lax-Milgram.

- Per la *coercività* di  $a$ , utilizzando la disuguaglianza di Poincaré e la formula di Green per il termine convettivo, troviamo che

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in V, \quad \text{con } \alpha = \mu_0 / (1 + c^2)$$

a patto che

$$-(1/2) \operatorname{div}(\mathbf{b}) + \sigma \geq 0 \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

- Per la *continuità* di  $a$ , utilizzando in particolare le disuguaglianze di Hölder e di Cauchy-Schwarz, si trova che

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in V$$

$$\text{con } M = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\sigma\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Per la continuità del funzionale lineare definito dal termine di destra si usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

# Formulazione debole del problema

Stime a priori e stima dell'errore del metodo di Galerkin

Si trovano facilmente anche le seguenti stime a priori:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1/\alpha)\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq (c/\mu_0)\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

che valgono anche per la soluzione discreta  $u_h$  dell'approssimazione di Galerkin del problema:

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Inoltre, grazie al Lemma di Céa, si ottiene la seguente stima dell'errore:

$$\|u - u_h\|_V \leq (M/\alpha) \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V,$$

che diventa tanto meno significativa quanto più il termine convettivo (oppure reattivo) domina quello diffusivo, poiché

$$M = \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \left( 1 + \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}} + \frac{\|\sigma\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}} \right).$$

# Un problema di diffusione-trasporto monodimensionale

Valutiamo il comportamento della soluzione numerica fornita dal metodo di Galerkin nel caso del problema monodimensionale:

$$\begin{cases} -\mu u'' + bu' = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

con  $\mu$  e  $b$  costanti positive. La sua formulazione debole è

$$\text{trovare } u \in H^1(0, 1) : \quad a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, 1),$$

con  $u(0) = 0$  e  $u(1) = 1$ , essendo  $a(u, v) = \int_0^1 (\mu u' v' + bu' v) dx$ .

Per poter applicare il lemma di Lax-Milgram, poniamo  $\hat{u} = u - x$  e  $F(v) = -a(x, v) = -\int_0^1 bv \, dx$  ottenendo la formulazione equivalente

$$\text{trovare } \hat{u} \in H_0^1(0, 1) : \quad a(\hat{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

# Un problema di diffusione-trasporto monodimensionale

La soluzione esatta del problema è  $u(x) = \frac{\exp((b/\mu)x) - 1}{\exp(b/\mu) - 1}$  che, se  $b/\mu \gg 1$ , presenta uno *strato limite* in corrispondenza del bordo  $x = 1$ .

Se usiamo il metodo di Galerkin con elementi finiti lineari per approssimare il problema, otteniamo

$$(b/2 - \mu/h)u_{i+1} + (2\mu/h)u_i - (b/2 + \mu/h)u_{i-1} = 0,$$

che, divisa per  $\mu/h$ , definendo il **numero di Péclet locale**  $\mathbb{P}e = \frac{|b|h}{2\mu}$ , diventa

$$(\mathbb{P}e - 1)u_{i+1} + 2u_i - (\mathbb{P}e + 1)u_{i-1} = 0,$$

la cui soluzione è

$$u_i = \frac{1 - \left(\frac{1+\mathbb{P}e}{1-\mathbb{P}e}\right)^i}{1 - \left(\frac{1+\mathbb{P}e}{1-\mathbb{P}e}\right)^m} \quad \text{per } i = 0, \dots, m.$$

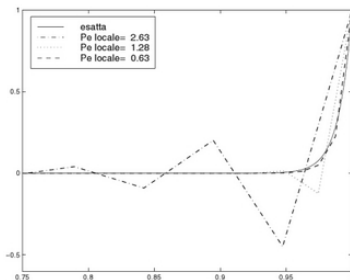
Osserviamo che, se  $\mathbb{P}e > 1$ , al numeratore compare una potenza con base negativa e quindi la soluzione approssimata diventa oscillante, al contrario di quella esatta che è monotona!



# Un problema di diffusione-trasporto monodimensionale

Più il numero di Péclet locale aumenta, più l'andamento della soluzione approssimata si discosta da quello della soluzione esatta, con oscillazioni sempre più marcate in corrispondenza dello strato limite.

Un rimedio sarebbe quello di scegliere il passo  $h$  abbastanza piccolo in modo che  $Pe < 1$ , ma ciò può diventare impraticabile. Ad esempio, se  $b = 1$  e  $\mu = 1/5000$ , si dovrebbe dividere  $(0, 1)$  in almeno 2500 intervalli!



# Un problema di diffusione-trasporto monodimensionale

## Schemi decentrati e diffusione artificiale

Per trovare un altro rimedio, si osserva che, approssimando il problema con differenze finite centrate, si ottiene la stessa equazione ottenuta con elementi finiti lineari sulla stessa griglia uniforme.

Nell'ambito delle differenze finite, il significato fisico del termine di trasporto suggerisce di discretizzare la derivata prima in un punto  $x_i$  con un rapporto incrementale decentrato, usando il valore in  $x_{i-1}$  se  $b > 0$ , in  $x_{i+1}$  se  $b < 0$ . Lo schema risultante (di ordine 1) è lo **schema upwind** (DFUP):

$$-\mu(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2 + b(u_i - u_{i-1})/h = 0 \quad \text{se } b > 0$$

Osservando che

$$(u_i - u_{i-1})/h = (u_{i+1} - u_{i-1})/2h - (h/2)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2,$$

tale schema si reinterpreta come uno schema alle differenze finite centrate in cui è stato aggiunto un termine di **diffusione artificiale** proporzionale ad  $h$ :

$$-\mu_h(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2 + b(u_{i+1} - u_{i-1})/2h = 0 \quad \text{dove } \mu_h = \mu(1 + \text{Pe}).$$

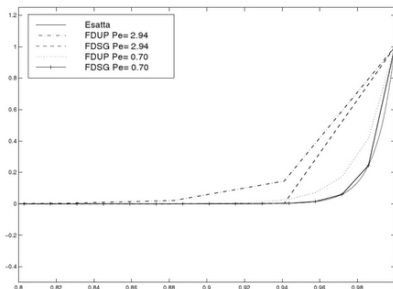
# Un problema di diffusione-trasporto monodimensionale

## Schemi decentrati e diffusione artificiale

Il nuovo numero di Péclet locale è:

$$Pe^* = bh/(2\mu_h) = Pe/(1 + Pe),$$

che è  $< 1$  per qualsiasi valore di  $h$ . Questa interpretazione ci permetterà di estendere la tecnica upwind agli elementi finiti e anche al caso bidimensionale.



Più in generale, possiamo prendere

$$\mu_h = \mu(1 + \varphi(\mathbb{P}e)),$$

dove  $\varphi$  è una funzione che soddisfa  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$ . La scelta

- $\varphi(t) = 0$  dà il metodo DFC,
- $\varphi(t) = t$  dà il metodo DFUP,
- $\varphi(t) = t - 1 + B(2t)$ , dove  $B(t) = t/(e^t - 1)$  per  $t > 0$  e  $B(0) = 1$  è la cosiddetta funzione di Bernoulli, dà lo schema di **Sharfetter e Gummel**. Si può verificare che tale schema è del secondo ordine e che produce una soluzione numerica i cui valori nei nodi di discretizzazione coincidono con quelli della soluzione esatta.

In generale, per ridurre le oscillazioni numeriche prodotte, quando  $\text{Pe} > 1$ , dal metodo di Galerkin

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

consideriamo il metodo di *Galerkin generalizzato*

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \quad a_h(u_h, v_h) = F_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

in cui

$$a_h(u_h, v_h) = a(u_h, v_h) + b_h(u_h, v_h) \quad \text{e} \quad F_h(v_h) = F(v_h) + G_h(v_h).$$

Vediamo vari modi con cui scegliere i *termini di stabilizzazione*  $b_h(u_h, v_h)$  e  $G_h(v_h)$ .

Basandoci su quanto abbiamo visto per le differenze finite, nel problema monodimensionale di diffusione-trasporto aggiungiamo al coefficiente di viscosità  $\mu$  una **viscosità artificiale (o numerica)** pari a  $\mu\varphi(\text{Pe})$ .

Ciò corrisponde a scegliere

$$b_h(u_h, v_h) = \mu\varphi(\text{Pe}) \int_0^1 u'_h v'_h dx, \quad G_h(v_h) = 0.$$

Il metodo stabilizzato risulta di ordine:

- 1 se si usa la viscosità upwind (indipendentemente dal grado  $r$ ),
- 2 se si usa la viscosità artificiale di tipo Scharfetter e Gummel (se  $r \geq 2$ ).

Infatti si può dimostrare il seguente risultato:

### Teorema

Per  $\mu$  fissato e  $h$  tendente a 0, si ha

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 [h^r \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)} + \varphi(\mathbb{P}e) \|u\|_{H^1(\Omega)}],$$

dove  $C_1$  è una costante positiva, indipendente da  $h$ .

Per  $h$  fissato e  $\mu$  tendente a 0, si ha

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2 [h^{r-1} \|u\|_{H^{r+1}(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}],$$

dove  $C_2$  è una costante positiva, indipendente da  $h$  e da  $\mu$ .

(Si ricordi che nel metodo upwind  $\varphi(\mathbb{P}e) = \mathbb{P}e = bh/(2\mu)$  e nel metodo di Scharfetter e Gummel  $\varphi(\mathbb{P}e) = O(h^2)$  per  $h \rightarrow 0$ .)

Nel caso del problema bidimensionale iniziale, nel metodo della *diffusione artificiale upwind* si aggiunge alla forma bilineare un termine di tipo

$$Qh \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega \quad \text{per una opportuna } Q > 0,$$

corrispondente ad aggiungere il termine di diffusione artificiale  $-Qh\Delta u$  al problema di partenza.

Più in generale, si può aggiungere al problema il termine

$$-Qh \operatorname{div}[(\mathbf{b} \cdot \nabla u)\mathbf{b}] \quad \text{con } Q = |\mathbf{b}|^{-1},$$

che dà luogo al termine

$$b_h(u_h, v_h) = Qh (\mathbf{b} \cdot \nabla u_h, \mathbf{b} \cdot \nabla v_h).$$

Il metodo risultante è detto della *streamline-diffusion* e ha solo ordine 1.



# Metodi di stabilizzazione

## Metodi fortemente consistenti

Consideriamo un problema di diffusione-trasporto-reazione che scriviamo nella forma astratta  $Lu = f$  in  $\Omega$ ,  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ , dove

$$Lu = -\mu\Delta u + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + \sigma u.$$

Scomponiamo l'operatore  $L$  nella somma delle sue parti *simmetrica* e *antisimmetrica*  $L_S$  e  $L_{SS}$ :

$$L_S u = -\mu\Delta u + (\sigma + (1/2)\operatorname{div} \mathbf{b})u, \quad L_{SS} u = (1/2)(\operatorname{div}(\mathbf{b}u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u).$$

Aggiungiamo alla approssimazione di Galerkin del problema un termine  $\mathcal{L}_h$

$$\text{trovare } u_h \in V_h : \quad a(u_h, v_h) + \mathcal{L}_h(u_h, f; v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h,$$

che soddisfi

$$\mathcal{L}_h(u, f; v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

in modo che il metodo ottenuto risulti **fortemente consistente**:

$$a(u, v_h) + \mathcal{L}_h(u, f; v_h) - (f, v_h) = 0 + 0 = 0.$$

# Metodi di stabilizzazione

## Metodi fortemente consistenti

Una scelta possibile per  $\mathcal{L}_h$  è la seguente (infatti  $Lu - f = 0$ )

$$\mathcal{L}_h(u_h, f; v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (Lu_h - f, \tau_K \mathcal{S}^{(\rho)}(v_h))_{L^2(K)},$$

dove  $\rho$  è un parametro da assegnare,

$$\tau_K(x) = \delta h_K / |\mathbf{b}(x)| \quad \forall x \in K, \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

$$\mathcal{S}^{(\rho)}(v_h) = L_{SS}v_h + \rho L_S v_h,$$

dove  $\delta > 0$  è un parametro da assegnare e  $h_K$  è il diametro dell'elemento  $K$ . Vediamo alcuni casi particolari associati alle diverse scelte di  $\rho$ :

- $\rho = 1$ : metodo *Galerkin Least-Squares* (GLS), in cui  $\mathcal{S}^{(1)}(v_h) = L_{SS}v_h + L_S v_h = Lv_h$ ;
- $\rho = 0$ : metodo *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), in cui  $\mathcal{S}^{(0)}(v_h) = L_{SS}v_h$ ;
- $\rho = -1$ : metodo *Douglas-Wang* (DW), in cui  $\mathcal{S}^{(-1)}(v_h) = (L_{SS} - L_S)v_h$ .

# Metodi di stabilizzazione

## Metodi fortemente consistenti

Ci soffermiamo sul **metodo GLS**, nel caso in cui  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti positive e  $\mathbf{b}$  una funzione vettoriale continua. Chiamiamo  $\gamma(x) = (1/2) \operatorname{div}(\mathbf{b}(x)) + \sigma$  e definiamo la norma

$$\|v\|_{GLS}^2 = \mu \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sqrt{\gamma}v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_K \delta((h_K/|\mathbf{b}|)L_V, L_V)_K.$$

Si possono dimostrare i seguenti risultati di stabilità e di convergenza:

Sia  $u_h$  la soluzione fornita dallo schema GLS. Allora esiste  $C > 0$  tale che

$$\|u_h\|_{GLS} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se supponiamo che  $u \in H^{r+1}(\Omega)$ , che lo spazio  $V_h$  soddisfi una certa proprietà di approssimazione locale, che  $\mathbb{P}_K(x) = |\mathbf{b}(x)|h_K/(2\mu) > 1 \forall x \in K$ , e che il parametro  $\delta$  sia abbastanza piccolo, allora vale la seguente stima

$$\|u_h - u\|_{GLS} \leq Ch^{r+1/2} |u|_{H^{r+1}(\Omega)}.$$

Consideriamo il seguente problema di diffusione-trasporto bidimensionale:

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = 1 & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{b} = (1, 1)^T$ .

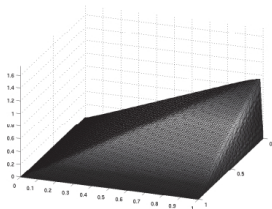
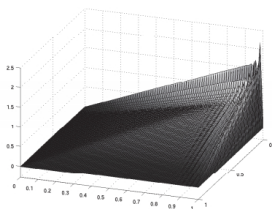
Nei grafici delle pagine successive confrontiamo le soluzioni ottenute con il metodo standard di Galerkin e con il metodo GLS.

Si nota che la soluzione è caratterizzata da uno strato limite in corrispondenza dei lati  $x = 1$  e  $y = 1$ .

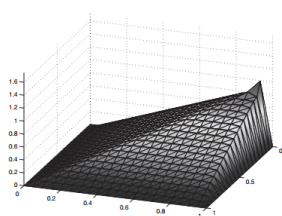
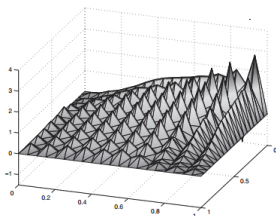
Per numeri di Péclet crescenti la soluzione del metodo di Galerkin standard presenta oscillazioni sempre più marcate, mentre il metodo GLS è in grado di fornire una soluzione numerica accettabile anche per valori molto alti di  $Pe$ .

# Confronto Galerkin standard - GLS

$$\mu = 10^{-3}, h = 1/80 \Rightarrow \text{Pe} = 8.84$$

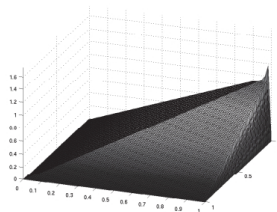
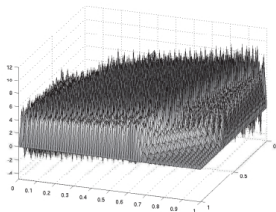


$$\mu = 10^{-3}, h = 1/20 \Rightarrow \text{Pe} = 35.35$$

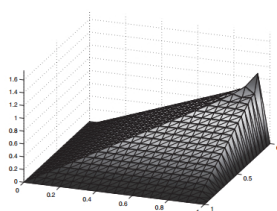
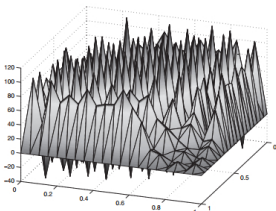


# Confronto Galerkin standard - GLS

$$\mu = 10^{-5}, h = 1/80 \Rightarrow \mathbb{P}e = 883.88$$



$$\mu = 10^{-5}, h = 1/20 \Rightarrow \mathbb{P}e = 3535.5$$



# Il metodo di Galerkin discontinuo

Il metodo di Galerkin discontinuo (DG) che abbiamo visto per il problema di Poisson può essere generalizzato al caso delle equazioni di diffusione-trasporto-reazione.

In particolare consideriamo il problema scritto in *forma conservativa* (che è equivalente a quella iniziale, detta non conservativa, se  $\mathbf{b}$  è costante)

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \operatorname{div}(\mathbf{b}u) + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Introducendo le seguenti notazioni per le medie e i salti di una funzione  $w$  sui lati degli elementi (dove se  $w$  è una funzione vettoriale si deve intendere come un prodotto scalare):

$$\{w\} = \frac{w^+ + w^-}{2}, \quad [w] = w^+ \cdot \mathbf{n}^+ + w^- \cdot \mathbf{n}^-,$$

$$\{\mathbf{b}u_\delta\}_\mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{b}u_\delta^+ & \text{se } \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^+ > 0 \\ \mathbf{b}u_\delta^- & \text{se } \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^+ < 0 \\ \mathbf{b}\{u_\delta\} & \text{se } \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}^+ = 0 \end{cases}$$

si ottiene la seguente formulazione:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M (\mu \nabla u_\delta, \nabla v_\delta)_{\Omega_m} - \sum_{e \in \mathcal{E}_\delta} \int_e [v_\delta] \cdot \{\mu \nabla u_\delta\} - \tau \sum_{e \in \mathcal{E}_\delta} \int_e [u_\delta] \cdot \{\mu \nabla v_\delta\} \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}_\delta} \gamma |e|^{-1} \int_e [u_\delta] \cdot [v_\delta] - \sum_{m=1}^M (\mathbf{b}u_\delta, \nabla v_\delta)_{\Omega_m} + \sum_{e \in \mathcal{E}_\delta} \int_e \{\mathbf{b}u_\delta\}_\mathbf{b} \cdot [v_\delta] \\ & + \sum_{m=1}^M (\sigma u_\delta, v_\delta)_{\Omega_m} = \sum_{m=1}^M (f, v_\delta)_{\Omega_m} \quad \forall v_\delta \in W_\delta^0. \end{aligned}$$



# Il metodo di Galerkin discontinuo

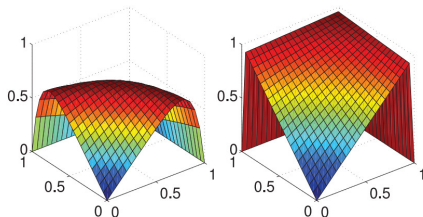
Confronto con Galerkin standard e SUPG

Confrontiamo le soluzioni prodotte dal metodo di Galerkin standard, dal metodo SUPG e dal metodo DG per il problema

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = g & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con  $\mathbf{b} = (1, 1)^T$  e  $f, g$  scelte in modo che la soluzione esatta sia

$$u(x, y) = x + y(1 - x) + (e^{-1/\mu} - e^{-(1-x)(1-y)/\mu}) / (1 - e^{-1/\mu}).$$



Soluzione esatta per  $\mu = 10^{-1}$   
e per  $\mu = 10^{-9}$

# Il metodo di Galerkin discontinuo

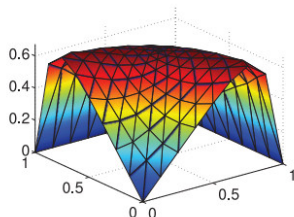
## Confronto con Galerkin standard e SUPG

Si vede che se il numero di Péclet globale  $\mathbb{P}e_g = |\mathbf{b}|/(2\mu)$  è piccolo, i tre metodi considerati forniscono soluzioni numeriche molto simili.

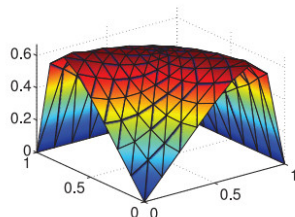
$$\mu = 10^{-1}$$

$$\mathbb{P}e_g = 7.07$$

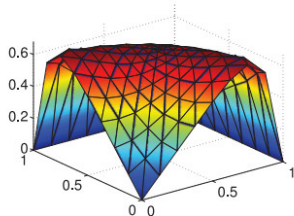
$$h \approx 1/8$$



(a) Metodo di Galerkin standard



(b) Metodo SUPG

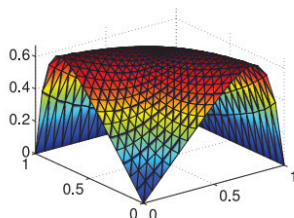


(c) Metodo DG

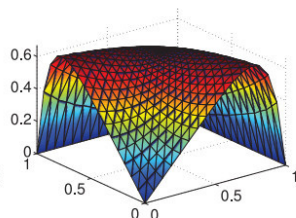
# Il metodo di Galerkin discontinuo

Confronto con Galerkin standard e SUPG

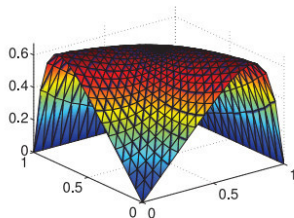
$$\mu = 10^{-1}$$
$$\text{Pe}_g = 7.07$$
$$h \approx 1/16$$



(a) Metodo di Galerkin standard



(b) Metodo SUPG



(c) Metodo DG

# Il metodo di Galerkin discontinuo

## Confronto con Galerkin standard e SUPG

Se invece il numero di Péclet globale è grande

- la soluzione data dal metodo di Galerkin standard presenta oscillazioni sempre più marcate;
- il metodo SUPG produce una soluzione accettabile, anche se presenta un picco in corrispondenza del punto  $(1, 1)$  (*over-shoot*).
- la soluzione data dal metodo DG presenta delle oscillazioni lungo i due lati  $x = 1$  e  $y = 1$ .

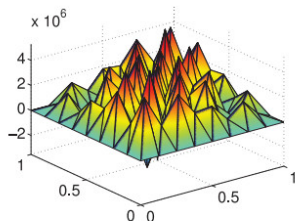
# Il metodo di Galerkin discontinuo

Confronto con Galerkin standard e SUPG

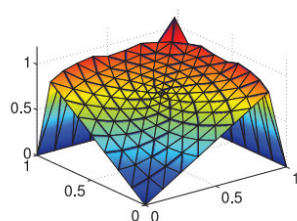
$$\mu = 10^{-9}$$

$$\text{Pe}_g = 707 \cdot 10^6$$

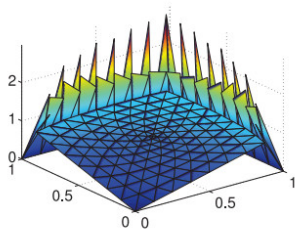
$$h \approx 1/8$$



(a) Metodo di Galerkin standard



(b) Metodo SUPG



(c) Metodo DG

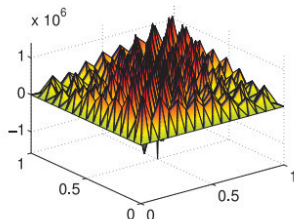
# Il metodo di Galerkin discontinuo

Confronto con Galerkin standard e SUPG

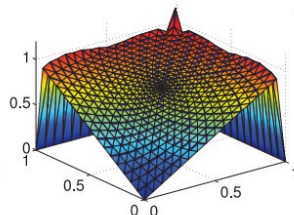
$$\mu = 10^{-9}$$

$$Pe_g = 707 \cdot 10^6$$

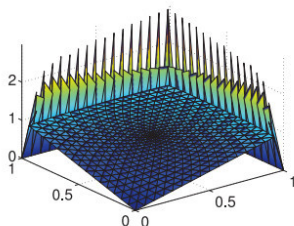
$$h \approx 1/16$$



(a) Metodo di Galerkin standard



(b) Metodo SUPG



(c) Metodo DG