Triangolazione di Delaunay

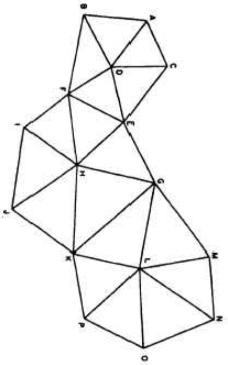
Francesco Visentin
Dottorato di Ricerca in Informatica - XXVIII Ciclo

Università degli Studi di Verona

13 Maggio 2013

Triangolazione
Presentazione

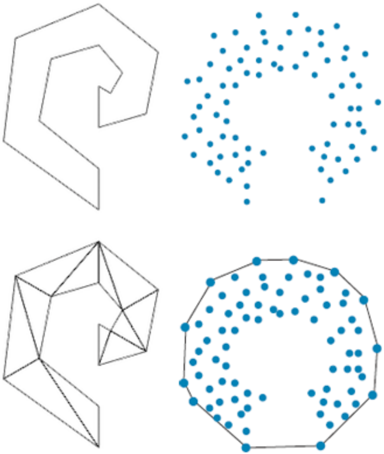
- Divisione di una superficie o volume in simplessi.
- Piano $\rightarrow$ triangoli (triangolazione).
- Diversi tipi di triangolazioni.
  - Tipo di oggetto.
  - Come avviene la suddivisione.
- Una superficie triangolata con un numero finito di triangoli si dice compatta.



Nel 1925 è stato dimostrato che ogni superficie può essere triangolata ma questo può richiedere un numero infinito di triangoli.

Triangolazione di un insieme di punti

Poligono vs insieme di punti



Triangolazione di un insieme di punti

Possibili triangolazioni

Figura: *A sinistra*: triangolazione di un poligono qualsiasi. *Al centro*: triangolazione di un insieme di punti. *A destra*: triangolazione non valida.

Triangolazione di un insieme di punti
Definizione

Definizione

Una triangolazione di un insieme finito di punti $P \subset \mathbb{R}^2$ è una collezione $\mathcal{T}$ di triangoli tali che:

1. $conv(P) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$.
2. I vertici di tutti i triangoli di $\mathcal{T}$ sono punti in P.
3. Se $p \in t$, per ogni $p \in P, t \in \mathcal{T}$, allora p è un vertice di t.
4. Per ogni coppia di triangoli $T, U \in \mathcal{T}$ l'intersezione $T \cap U$ è un vertice in comune, un lato in comune o vuota.

Dato un generico insieme di punti esiste (almeno) una triangolazione.

Triangolazione di un insieme di punti

Proprietà

Proposizione

Ogni insieme $P \subseteq \mathbb{R}^2$ di $n \geq 3$ punti ammette una triangolazione a meno che tutti i punti in P siano collineari.

Lemma

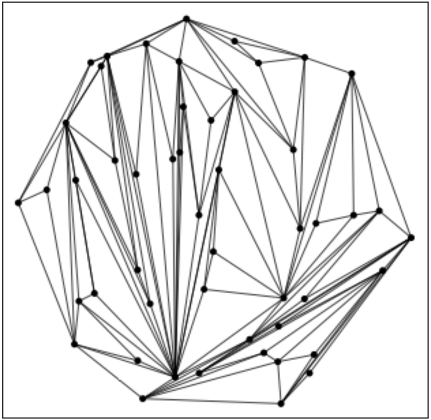
Ogni triangolazione di un insieme $P \subset \mathbb{R}^2$ composto da n punti ha esattamente $3n - h - 3$ spigoli. Dove h è il numero dei vertici di $conv(P)$.

Lemma

Ogni triangolazione di un insieme $P \subset \mathbb{R}^2$ composto da n punti ha esattamente $2n - h - 2$ facce. Dove h è il numero dei vertici di $conv(P)$.

Triangolazione di un insieme di punti
Scan triangulation

Una triangolazione costruita aggiungendo un punto alla volta viene chiamata scan triangulation.



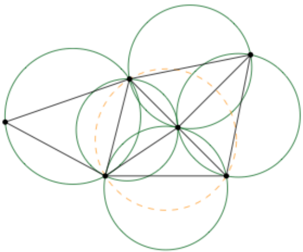
- Sono "anti estetiche".
- I vertici tendono ad essere molto distanti tra loro.
- Come conseguenza, poco utili per interpolazione.

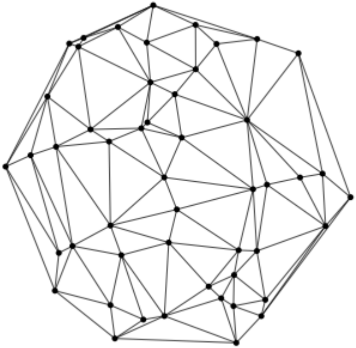
Triangolazione di un insieme di punti

Triangolazione di Delaunay

Definizione

Una triangolazione di un insieme finito di punti $P \subset \mathbb{R}^2$ viene detta di Delaunay se il cerchio circoscritto ad ogni triangolo è vuoto, ovvero nessun punto di P vi giace all'interno.





Triangolazione di Delaunay

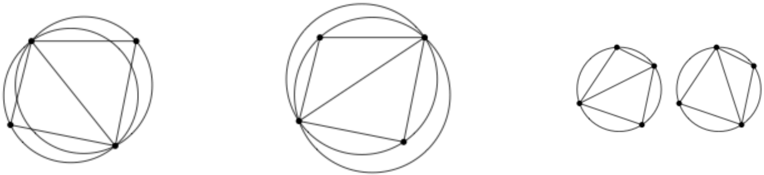
Proprietà

- Ogni insieme di punti (non tutti collineari tra di loro) ha una sola triangolazione di Delaunay
- Ogni triangolazione di Delaunay massimizza il più piccolo angolo interno tra tutte le triangolazioni possibili.
- La triangolazione di Delaunay è il "duale" di un'altra costruzione geometrica nota come *Tessellazione di Dirichlet* ($\rightarrow$ *Diagramma di Voronoi*).

Unica triangolazione
Caso particolare

È interessante considerare un caso particolare: 4 punti non allineati

- Ci sono due possibili triangolazioni, ma in generale solo una è una triangolazione di Delaunay valida.
- Se i quattro punti giacciono sulla stessa circonferenza allora esistono due possibili triangolazioni di Delaunay.



Proposizione

Dato un insieme $P \subset \mathbb{R}^2$ di quattro punti non tutti collineari ma non concentrici, allora P ha esattamente una triangolazione di Delaunay.

Algoritmo di flip di Lawson

Serve a dimostrare algoritmicamente che "per ogni insieme di punti P non tutti collinerai, esiste una triangolazione di Delaunay".

Algorithm 1 Lawson flip

1: Compute some triangulation of P (e.g. the scan triangulation)
2: **while** Exist a subtriangulation of four points in convex position that is not Delaunay **do**
3: Replace this subtriangulation by the other triangulation of the four points
4: **end while**

Teorema

Siano dati un insieme di n punti $P \subseteq \mathbb{R}^2$ e una sua triangolazione $\mathcal{T}$. L'algoritmo di Lawson termina dopo al più $\binom{n}{2} = \mathcal{O}(n^2)$ flip. La risultate triangolazione $\mathcal{D}$ sarà una triangolazione di Delaunay.

Triangolazione di Delaunay
Proprietà

- Ogni insieme di punti (non tutti collineari tra di loro) ha una sola triangolazione di Delaunay
- Ogni triangolazione di Delaunay massimizza il più piccolo angolo interno tra tutte le triangolazioni possibili.
- La triangolazione di Delaunay è il "duale" di un'altra costruzione geometrica nota come *Tessellazione di Dirichlet* ($\rightarrow$ *Diagramma di Voronoi*).

Scan vs Delaunay

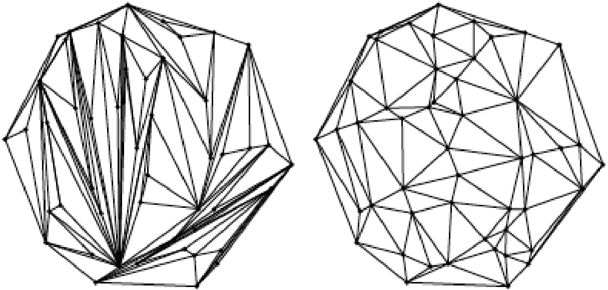


Figura: Triangolazioni a confronto. *A destra* una triangolazione di tipo "scan", *a sinistra* una triangolazione di Delaunay.

Massimizzare il più piccolo angolo

- Angoli di ampiezza maggiore $\rightarrow$ triangoli più simile a triangoli equilateri
- Una triangolazione di Delaunay massimizza l'ampiezza del più piccolo angolo tra tutte le triangolazioni possibili dato un insieme di punti.
- Questo non implica che non esistano triangoli allungati. Nel caso ce ne fossero, allora ci saranno anche in tutte le altre triangolazioni.

Teorema

Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme finito di punti (non tutti collinerai ne concentrici). Sia $\mathcal{D}^*$ l'unica triangolazione di Delaunay di P, e sia $\mathcal{T}$ una qualsiasi altra triangolazione di P. Definiamo la sequenza ordinata degli angoli interni come $A(\mathcal{T}) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{3m})$. Allora $A(\mathcal{T}) \leq A(\mathcal{D}^*)$.

Triangolazione di Delaunay
Proprietà

- Ogni insieme di punti (non tutti collineari tra di loro) ha una sola triangolazione di Delaunay
- Ogni triangolazione di Delaunay massimizza il più piccolo angolo interno tra tutte le triangolazioni possibili.
- La triangolazione di Delaunay è il "duale" di un'altra costruzione geometrica nota come *Tessellazione di Dirichlet* ($\rightarrow$ *Diagramma di Voronoi*).

Algoritmi di Raffinamento

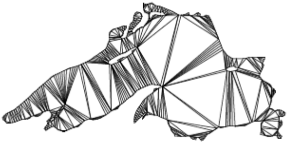
- Tecnica per generare mesh triangolari utili per le interpolazioni, FEM e FVM.
- Problema è trovare una triangolazione copra il dominio e contenga solo triangoli che soddisfino i vincoli che abbiamo presentato.
- Questo processo garantisce una soluzione e da risultati eccellenti anche nella pratica.
- Vedremo due algoritmi
    - Algoritmo di Ruppert
    - Algoritmo di Chew
- Solitamente il raffinamento viene calcolato in $\mathcal{O}(n)$.

Algoritmo di Ruppert

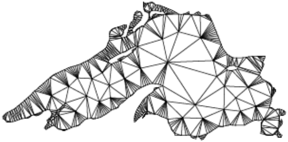
- L'algoritmo è (forse) il primo che funziona in modo soddisfacente anche in casi pratici.
- Permette di variare la densità dei triangoli anche in regioni molto vicine tra loro.
- Partendo da una generica triangolazione iniziale, l'algoritmo aggiunge vertici fino a che tutti i triangoli non soddisfano i vincoli imposti dall'utente.
- L'algoritmo è basato sulle seguenti due operazioni:
  1. Il punto medio di un segmento che non soddisfa la regola del "cerchio circoscritto" viene inserito nella triangolazione
  2. Il circocentro di un triangolo "non raffinato" viene inserito nella triangolazione

Algoritmo di Ruppert
Esempio

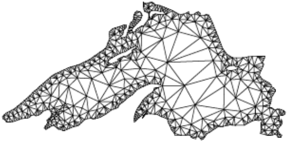
Lake Superior PSLG.



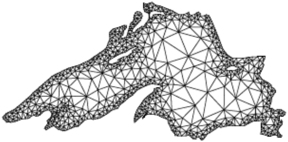
Triangulated with no minimum angle.



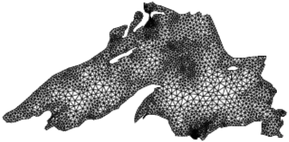
Triangulated with 5° minimum angle.



Triangulated with 15° minimum angle.



Triangulated with 25° minimum angle.



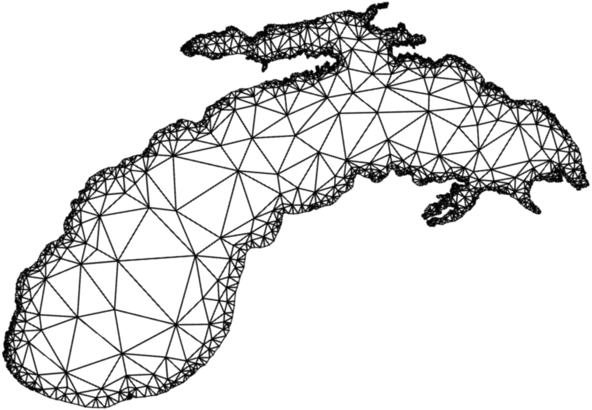
Triangulated with 34.2° minimum angle.

Algoritmo di Chew

- Molto simile all'algoritmo di Ruppert
  - Offre una maggiore "documentazione" teorica.
  - Nella pratica manipola meno i lati dei triangoli
- I passi principali sono molto simili a quelli dell'algoritmo di Ruppert.
- Ne è garantita la terminazione e la triangolazione risultante avrà angoli di ampiezza almeno di 26.5° (Ruppert garantiva 20.7°)
- La mesh prodotta non è detto che sia di Delaunay.
- Viene utilizzato comunemente in molti pacchetti per la generazione di mesh.
  - La mesh finale ha meno triangoli
  - La suddivisione dei segmenti porta a migliori risultati sia in termini di angoli (minimi), di lunghezza dei lati e sul numero di triangoli.

Algoritmo di Chew

Esempio



Algoritmo di costruzione

- Vediamo altri due algoritmi
  - Algoritmo di Bowyer-Watson
  - Algoritmo di Green-Sibson
- Servono a costruire incrementalmente una triangolazione di Delaunay $\mathcal{T}_{n+1}$ di $n+1$ punti a partire da una preesistente triangolazione di Delaunay $\mathcal{T}_n$ di n punti.
- Caso pessimo viene calcolato in $\mathcal{O}(n^2)$.

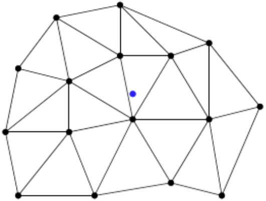
Algoritmo di Bowyer-Watson

L'algoritmo consiste essenzialmente in due passi:

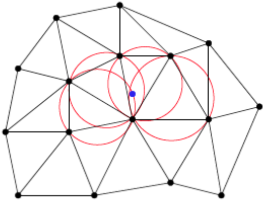
1. Costruzione della cavità. La cavit̀a $\mathcal{C}$ è l'insieme dei triangoli di $\mathcal{T}_n$ il cui cerchio circoscritto contiene il punto P. I triangoli della cavità devono essere eliminati da $\mathcal{T}_n$ perché violano la proprietà del "cerchio circoscritto".
2. Riconnessione. La triangolazione di Delaunay $\mathcal{T}_{n+1}$ si ottiene connettendo il punto P con i punti P_k appartenenti al contorno della cavità.

Algoritmo di Bowyer-Watson

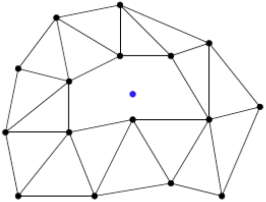
Triangolazione e nuovo punto



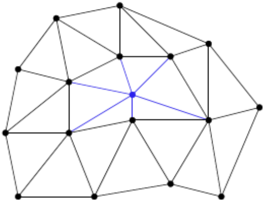
Violazione cerchi circoscritti



Cavità



Riconnessione

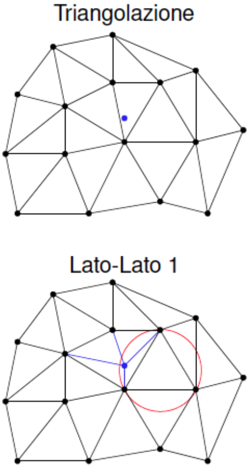


Algoritmo di Green-Sibson

L'algoritmo consiste essenzialmente in tre passi:

1. Costruzione della "base". La base coincide con il triangolo che contiene il punto P (o con due triangoli adiacenti se P giace su un lato della triangolazione).
2. Riconnessione. Si ottiene una triangolazione temporanea (non di Delaunay) connettendo P con i punti P_k appartenenti al contorno della base.
3. Trasformazione. Per tutti i triangoli che hanno un vertice coincidente con P e che non soddisfano la proprietà del cerchio circoscritto, si effettua un flip di Lawson, fintanto che tutti i nuovi triangoli soddisfano alla proprietà del cerchio circoscritto.

Algoritmo di Green-Sibson



Alcuni esempi con FreeFem++ & Matlab

Triangolazioni d'esempio
Triangolazione del Lago di Garda (work in progress . . .)