1 Notazioni

1.1 Insiemi

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	numeri naturali
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$	numeri interi
$\mathbb{Q} = \{r \text{ tali che } r = p/q,\ p, q \text{ numeri interi}, q \neq 0\}$	numeri razionali
$\mathbb{R}$	numeri reali

Si usano le lettere minuscole per indicare un generico numero: se non si specifica diversamente, si intende un numero reale. Per esempio: "sia x un numero" significa "sia x un qualunque numero reale". Per convenzione, si usano *preferibilmente* le lettere h, i, j, k, l, m, n per indicare un numero naturale. Tutti i numeri naturali sono anche interi, razionali e reali. Tutti i numeri interi sono anche razionali e reali. Tutti i numeri razionali sono anche reali. I numeri reali, ma non razionali, sono detti *irrazionali*. Per esempio, $0, 1, -2, 3/4, \sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}$ sono numeri reali. $\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{5}$ sono numeri irrazionali. $3/0, 0/0, \infty$ non sono numeri. $\sqrt{-1}$ non è un numero reale. I numeri $x > 0$ sono chiamati *positivi*. I numeri $x \geq 0$ sono chiamati *non negativi*. Per esempio, i numeri naturali sono i numeri interi non negativi.

1.2 Radici aritmetiche

Con il simbolo $\sqrt[m]{x}$, ove m è un numero naturale pari diverso da 0 e x un numero reale *non negativo*, si indica *l'unico* numero reale *non negativo* y tale che $y^m = x$. Se $m = 2$, lo si omette. Per esempio, $\sqrt[2]{0} = 0$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[4]{\pi + 3} > 0$. $\sqrt{-3}$ non è un numero reale.

Con il simbolo $\sqrt[m]{x}$, ove m è un numero naturale dispari e x un numero reale, si indica *l'unico* numero reale y tale che $y^m = x$. Per esempio, $\sqrt[3]{0} = 0$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-\pi} < 0$.

1.3 Intervalli

$$(a, b) = \{\text{tutti i numeri reali } x \text{ tali che } a < x < b\}$$
$$(a, b] = \{\text{tutti i numeri reali } x \text{ tali che } a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{\text{tutti i numeri reali } x \text{ tali che } a \leq x < b\}$$
$$[a, b] = \{\text{tutti i numeri reali } x \text{ tali che } a \leq x \leq b\}$$

1.4 Lettere greche

minuscole	maiuscole	
α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ, ε		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ, ϑ	Θ	theta
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mu o mi
ν		nu o ni
ξ	Ξ	xi
π		pi
ρ, ϱ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
ϕ, φ	Φ	phi
χ		chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

2 (Dis)equazioni

2.1 Di primo grado

L'equazione

$$ax + b = 0$$

nell'incognita reale x con a, b numeri reali, $a \neq 0$ è detta di *primo* grado. Si possono applicare due regole:

1. aggiungere da entrambe le parti uno stesso numero (per esempio, $(-b)$)

$$(-b) + ax + b = (-b) + 0$$

2. moltiplicare da entrambe le parti per uno stesso numero *diverso da 0* (per esempio, $\frac{1}{a}$)
$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}(-b)$$
Si arriva alla soluzione
$$x = -\frac{b}{a}$$

La disequazione
$$ax + b \geq 0$$
(con le stesse ipotesi su x, a, b) è detta di primo grado. Si possono applicare due regole:

1. aggiungere da entrambe le parti uno stesso numero
2. moltiplicare da entrambe le parti per uno stesso numero *positivo*

Si distinguono allora due casi

$$\begin{array}{cc} a > 0 & a < 0 \\ ax + b \geq 0 & ax + b \geq 0 \\ ax \geq -b & b \geq -ax \\ x \geq -\dfrac{b}{a} & -\dfrac{b}{a} \geq x \end{array}$$

2.2 Di secondo grado

L'equazione
$$ax^2 + bx + c = 0$$
nell'incognita reale x con a, b, c numeri reali, $a \neq 0$ è detta di *secondo* grado. Si possono applicare *tutte e sole* le regole enunciate per le equazioni di primo grado.

2.3 $b = c = 0$

Se $b = c = 0$, allora

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \\ \text{(equivalentemente) } x_1 &= 0 \; e \; x_2 = 0 \end{aligned}$$

2.3.1 $c = 0, b \neq 0$

Se $c = 0$, allora

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \\ x &= 0 \textit{ oppure } x = -\frac{b}{a} \\ \text{(equivalentemente) } x_1 &= 0 \textit{ e } x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

2.3.2 $b = 0, c \neq 0$

Se $b = 0$, allora

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Si distinguono allora due casi

$$-\frac{c}{a} \geq 0$$

$$x = \sqrt{-\frac{c}{a}} \textit{ oppure } x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$\text{(equivalentemente) } x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \textit{ e } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$-\frac{c}{a} < 0$$

nessuna soluzione

2.3.3 $b, c \neq 0$

Se $b, c \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx &= -4ac \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \end{aligned}$$

Si distinguono allora due casi

$$b^2 - 4ac \geq 0$$
$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ } \textit{oppure} \text{ } 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ } \textit{oppure} \text{ } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$\text{(equivalentemente) } x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ } e \text{ } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$b^2 - 4ac < 0$$
$$\text{nessuna soluzione}$$

Se $b^2 - 4ac = 0$ (caso particolare del primo caso), chiaramente $x_1 = x_2$.