altro che mutamenti finché prendiamo in considerazione periodi di tempo finiti comunque brevi. Perciò, per le necessità logiche del caso, siamo riportati alla concezione degli istanti senza durata, o in ogni modo senza una durata che possa essere rivelata anche dal più delicato strumento. Benché possa sembrare difficile, tale concezione in realtà è più facile di qualunque altra permessa dai fatti. È un genere di strutture alla quale si deve adattare ogni teoria sostenibile — non necessariamente il semplice enunciato dei nudi fatti, ma una forma in cui sia possibile dare, con adatte interpretazioni, degli enunciati dei nudi fatti che siano veri. Nelle precedenti conferenze è stata intrapresa la considerazione diretta dei nudi fatti del mondo fisico; nella conferenza attuale, ci siamo occupati di mostrare che nei nudi fatti non c'è nulla di incoerente con la dottrina matematica della continuità e non c'è nulla che richieda una continuità di tipo radicalmente diverso da quella del moto matematico.

SESTA CONFERENZA

IL PROBLEMA DELL'INFINITO DAL PUNTO DI VISTA STORICO

Si ricorderà che quando esponemmo le ragioni in base alle quali si pone in discussione la realtà del mondo sensibile, era stata citata la presunta impossibilità dell'infinito e della continuità. Sulla base della nostra precedente discussione sulla fisica, sembrerebbe che non esiste nessuna prova empirica *conclusiva* in favore dell'infinità o della continuità degli oggetti dei sensi o della materia. Ciononostante, la spiegazione che ammette l'infinito e la continuità rimane incomparabilmente più facile e più naturale, da un punto di vista scientifico, di qualsiasi altra, e sin da quando Georg Cantor dimostrò che le presunte contraddizioni erano illusorie, non c'è più ragione di affaticarsi dietro una spiegazione finitista del mondo.

Tutte le presunte difficoltà della continuità hanno origine dal fatto che una serie continua deve avere un numero infinito di termini, e in effetti sono difficoltà riguardo all'infinito. Quindi, nel mentre sciogliamo le contraddizioni dell'infinito, mostriamo allo stesso tempo la possibilità logica della continuità così come è assunta nella scienza.

Con le prime due antinomie di Kant si può illustrare il modo col quale è stato usato l'infinito per mettere in dubbio il mondo dei sensi. Nella prima, la tesi afferma: « Il mondo ha un inizio nel tempo, e, per quanto riguarda lo spazio, è racchiuso in certi limiti »; l'antinomia afferma: « Il mondo non ha alcun inizio e alcun limite nello spazio, ma è infinito sia rispetto al tempo che allo spazio ». Kant afferma di dimostrare tutt'e due queste proposizioni, mentre invece deve essere impossibile dimostrare l'una o l'altra, se c'è qualcosa di vero in ciò che abbiamo detto della logica moderna. Tuttavia, per recuperare il mondo dei sensi, basta confutare la dimostrazione di *una* delle due. Per i nostri scopi attuali, è la dimostrazione che il mondo è *finito* che ci interessa. L'argomento di Kant per quanto riguarda lo spazio si basa sul suo argomento riguardo il tempo. Perciò dobbiamo esaminare soltanto l'argomento che riguarda il tempo. Egli afferma ciò che segue:

« Perché supponiamo che il mondo non abbia inizio riguardo al tempo, di modo che fino ad un dato istante è passata un'eternità, e perciò è trascorsa una serie infinita di stati successivi delle cose del mondo. Ma l'infinità di una serie consta proprio in ciò, che non può mai essere completata da sintesi successive. Perciò è impossibile una serie di stati del mondo con un passato infinito, e di conseguenza un inizio del mondo è una condizione necessaria per la sua esistenza; che era la prima cosa da dimostrare ».

Su tale argomentazione è possibile fare molte e diverse critiche, ma ci accontenteremo semplicemente di un minimo. Tanto per cominciare, è un errore definire l'infinità di una serie come « impossibilità di completamento per sintesi successive ». Come vedremo nella prossima conferenza, la nozione di infinità è principalmente una proprietà delle *classi* e solo per derivazione è applicabile alle serie; le classi infinite sono date immediatamente dalla proprietà dei loro membri che le definiscono, di modo che non c'è alcuna questione di « completamento » o di « sintesi successive ». Inoltre la parola « sintesi » suggerendo l'attività mentale di sintetizzare, introduce più o meno furtivamente quel riferimento alla mente che contagia tutta la filosofia di Kant. In secondo luogo, quando Kant dice che per sintesi successive non si può « mai » completare una serie infinita, tutto ciò che è sempre in buon diritto di dire è che non è possibile completarla *in un tempo finito*. Così quello che in realtà dimostra è al massimo che se il mondo non avesse alcun inizio, dovrebbe essere già esistito per un periodo di tempo infinito. Tuttavia questa è una conclusione ben povera, per nulla adatta ai suoi scopi. E con questo risultato possiamo, volendo, abbandonare la prima antinomia.

Vale la pena, tuttavia, di prendere in considerazione come Kant sia arrivato a fare un errore così elementare. È evidente che ciò che accadde nella sua immaginazione fu qualcosa di simile a questo: partendo dal presente e retrocedendo nel tempo, se il mondo non ha inizio abbiamo una serie infinita di eventi. Come si vede dalla parola « sintesi », immaginò una mente nello sforzo di capirli successivamente *nell'ordine inverso* a quello nel quale erano avvenuti, e cioè andando a ritroso a partire dal presente. *Questa* serie evidentemente non ha fine. Ma la serie degli eventi fino al momento attuale ha una fine, dato che terminano col presente. A causa dell'inveterato soggettivismo delle sue abitudini mentali, non riuscì a notare che aveva invertito il senso della serie sostituendo la sintesi a ritroso al posto degli avvenimenti che accadono uno successivamente all'altro, e presunse così che fosse necessario identificare le serie mentali che non hanno fine con le serie fisiche che hanno una fine ma non un inizio. Fu quest'errore, io credo, che operando inconsciamente lo portò ad attribuire validità ad un esempio di ragionamento sbagliato, singolarmente superficiale.

La seconda antinomia illustra la dipendenza del problema della continuità da quello dell'infinità. La tesi afferma: « Ogni sostanza complessa nel mondo è composta di parti semplici e ovunque non esiste altro che il semplice o ciò che di esso è composto ». L'antitesi afferma: « Nessuna cosa complessa nel mondo è composta di parti semplici, e in ogni parte di esso non esiste nulla di semplice ». Qui, come prima, le dimostrazioni sia della tesi che dell'antitesi sono ampiamente esposte a critiche, ma per lo scopo di vendicare la fisica e il mondo dei sensi basta trovare un errore in *una sola* delle dimostrazioni. A questo scopo sceglieremo la dimostrazione dell'antitesi, che comincia al modo seguente:

« Supponiamo che (come sostanza) una cosa complessa consista di parti. Dato che ogni relazione esterna, e quindi ogni composizione con sostanze, è possibile solo nello spazio, lo spazio occupato da una cosa complessa deve essere composto da tante parti quante sono quelle che compongono la cosa. Ora lo spazio non consiste di parti semplici, ma di spazi ».

Il resto dell'argomentazione non ci riguarda, perché il nocciolo della dimostrazione sta nella sola affermazione: « Lo spazio non consiste di parti semplici, ma di spazi ». Questa è simile all'obiezione di Bergson alla « assurda proposizione che il moto è fatto di immobilità ». Kant non ci dice perché ritiene che lo spazio sia composto di spazi piuttosto che di parti semplici. La geometria considera lo spazio fatto di punti, che sono semplici; ed anche se, come abbiamo visto, questo punto di vista non è *necessario* né scientificamente né logicamente, *prima facie* resta possibile, e la sua semplice possibilità basta a viziare l'argomentazione di Kant. Perché, se la sua dimostrazione della tesi dell'antinomia fosse valida, e si potesse evitare l'antitesi ammettendo i punti, allora la stessa antinomia offrirebbe una ragione conclusiva in favore dei punti. Perché allora Kant ritiene impossibile che lo spazio debba essere composto di punti?

Penso che probabilmente fu influenzato da due considerazioni. In primo luogo, la cosa essenziale dello spazio è l'ordine spaziale, e i soli punti, in se stessi, non spiegano l'ordine spaziale. È evidente che questo argomento ammette lo spazio assoluto; ma sono le *relazioni* spaziali le sole importanti, ed esse non possono essere ridotte a punti. La base della sua convinzione dipende perciò dalla sua ignoranza della teoria logica dell'ordine e dalle sue oscillazioni tra spazio relativo ed assoluto. Ma c'è anche un altro motivo di base per la sua opinione, motivo che per il nostro tema attuale è più importante. Esso deriva dalla divisibilità infinita. Si può dividere uno spazio a metà, e poi ancora a metà, e così via *ad infinitum,* e ad ogni stadio del processo le parti saranno ancora degli spazi, non dei punti. Per poter raggiungere, con tale metodo, dei punti, sarebbe necessario arrivare al termine di un processo senza fine, che è impossibile. Ma proprio come si può dare una classe infinita tutta in una volta attraverso il concetto che la definisce, benché non sia possibile raggiungerla per enumerazione successiva, così si può dare un insieme di punti infinito tutto in una volta in quanto formante una retta o un'area o un volume, anche se non è possibile raggiungerli per mezzo del processo di divisione successiva. Quindi la divisibilità infinita dello spazio non dà alcun motivo per negare che lo spazio sia composto di punti. Kant non dà i motivi per tale rifiuto, possiamo perciò congetturare che ve ne fossero. Ma le due ragioni precedenti, che abbiamo visto erronee, sembrano sufficienti a spiegare la sua opinione, possiamo quindi concludere che non è stata dimostrata l'antitesi della seconda antinomia.

La precedente illustrazione delle antinomie di Kant, è stata introdotta al solo scopo di mostrare l'attinenza del problema dell'infinità col problema della realtà degli oggetti dei sensi. Nel resto dell'attuale conferenza, vorrei enunciare e spiegare il problema dell'infinità, mostrare come sorge e mostrare la non pertinenza di tutte le soluzioni proposte dai filosofi. Nella conferenza successiva tenterò di esporre la vera soluzione, quella scoperta dai matematici, ma che tuttavia appartiene essenzialmente alla filosofia. La soluzione è definitiva, nel senso che soddisfa e convince tutti coloro che la studiano accuratamente. Per oltre duecento anni l'intelletto umano è stato impegnato da questo problema; i suoi numerosi errori e il suo successo definitivo rendono il problema stesso particolarmente adatto ad illustrare tale metodo.

Sembra che il problema sia sorto in modo simile al seguente [1]. Pitagora e i suoi seguaci che, come Descartes, s'interessavano all'applicazione del numero alla geometria, in tale scienza adottarono metodi più aritmetici di quelli resi abituali da Euclide. Essi, o i loro contemporanei atomisti, credevano apparentemente che lo spazio fosse composto di punti, mentre il tempo di istanti indivisibili [2]. In se stessa, questa convinzione non avrebbe dato luogo alle difficoltà che incontrarono, ma presumibilmente era accompagnata da un'altra convinzione: il numero dei punti di una qualunque area finita o di istanti di un qualunque periodo finito, doveva essere finito. Non credo che quest'ultima convinzione fosse consapevole, perché probabilmente non gli si offriva nessun'altra possibilità. Ma tuttavia tale convinzione aveva degli effetti, e ben presto li portò ad essere in conflitto con fatti scoperti da loro stessi. Tuttavia prima di spie-

---

[1] Per quanto riguarda i primi filosofi greci, la mia conoscenza deriva in gran parte dal notevole lavoro del Burnet, *Early Greek Philosophy* (II ed., London 1908). Sono stato anche molto assistito da D.S. Robertson del Trinity College, che ha supplito alle mie deficienze nella conoscenza dei Greci e mi ha fatto osservare molti riferimenti importanti.

[2] Cfr. ARISTOTELE, *Metafisica,* M. 6, 1080*b*, 18 e segg., e 1083*b*, 8 e segg.

gare come avvenne ciò, è necessario dire una parola come spiegazione dell'espressione « numero finito ». La spiegazione esatta è materia della nostra conferenza successiva; per il momento può bastare che intendo dire 0, 1, 2, 3 e così via per sempre — in altre parole, ogni numero che possa essere ottenuto attraverso l'addizione successiva di 1. Questo include tutti i numeri che si possono esprimere per mezzo delle nostre cifre ordinarie, e dato che tali numeri possono essere resi sempre maggiori senza raggiungere mai un massimo che non può essere superato, è facile supporre che non vi siano altri numeri. Ma questa presunzione, per quanto naturale, è sbagliata.

È questione dibattuta se i Pitagorici stessi credessero che lo spazio e il tempo fosse composto di punti e istanti indivisibili [3]. Sembrerebbe che non sia stata ancora ben fatta la distinzione fra spazio e materia e che perciò, nell'esprimere un punto di vista atomista, è difficile decidere se s'intende particelle di materia o punti dello spazio. Nella *Fisica* [4] di Aristotele, c'è un passo interessante [5], in cui dice:

« Tutti i Pitagorici sostenevano l'esistenza del vuoto, e dicevano che entra nel cielo stesso da un soffio sconfinato, poiché anche il cielo soffia nel vuoto; e il vuoto differenzia

[3] C'è ragione di pensare che i Pitagorici distinguessero tra quantità discrete e quantità continue. G.J. ALLMAN, nel suo *Greek Geometry from Thales to Euclid,* dice (pag. 23): « I Pitagorici fecero una quadruplice divisione della scienza matematica, attribuendo una parte alla quantità di numero, τὸ πόσον, e un'altra alla quantità di grandezza, τὸ πηλίκον, e assegnando poi un'altra duplice divisione a ciascuna di queste parti. Dicevano infatti che la quantità discreta, o *quantità di numero,* sussiste per se stessa o deve essere considerata in relazione con qualche altra; mentre la quantità continua, o *quantità di grandezza,* è statica od in moto. Affermarono quindi che l'aritmetica contempla quella quantità discreta che sussiste in sé, mentre la musica quella che è in relazione con un'altra; e che la geometria considera la quantità continua in quanto immobile; mentre l'astronomia (τὴν σφαιρικὴν) contempla la quantità continua in quanto ha la natura di motore in sé. (Proclo, ed. Friedlein, pag. 35. Per quanto riguarda la distinzione fra quantità continue, τό πηλίκου , e quantità discrete, τὸ πόσον, vedi IAMBL., *in Nicomachi Geraseni Arithmeticam introductionem,* ed. Tennulius, pag. 148) ». Cfr. pag. 48.

[4] IV, 6 213*b*, 22; H. RITTER e L. PRELLER, *Historia Philosophiae Graecae,* 8ª ediz., Gotha, 1898, pag. 75 (in futuro ci si riferirà a quest'opera con « R. P. »).

[5] Citato da Burnet, op. cit., pag. 120.

le nature come se fosse una sorta di separazione di consecutivi e come se fosse la loro differenziazione; dicevano anche che questo accade prima di tutto nei numeri, perché è il vuoto che li rende differenti ».

Ciò sembra comportare che essi considerassero la materia composta di atomi, tra l'uno e l'altro dei quali c'è il vuoto. Ma se così fosse, avrebbero dovuto pensare di studiare lo spazio solo prestando attenzione agli atomi, perché sarebbe altrimenti difficile descrivere i loro metodi aritmetici nella geometria, o la loro affermazione che « le cose sono numeri ».

Ciò che pose in difficoltà i Pitagorici nei loro tentativi di applicare i numeri ebbe origine dalla loro scoperta degli incommensurabili, e questo, a sua volta, sorse al modo che segue. Come abbiamo imparato in gioventù, Pitagora scoprì la proposizione che la somma dei quadrati costruiti sui cateti di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa. Si dice che abbia sacrificato un bue quando scoprì questo teorema; se è così, quel bue è il primo martire della scienza. Ma, benché tale teorema sia quello che principalmente gli ha dato l'immortalità, si rivelò subito fatale per l'intera sua filosofia, a causa delle sue conseguenze. Consideriamo il caso di un triangolo rettangolo con i cateti uguali: un tale triangolo è formato da due lati di un quadrato e dalla diagonale. Allora, in virtù del teorema, il quadrato della diagonale è doppio del quadrato costruito su uno dei lati. Ma Pitagora o i suoi primi seguaci dimostrarono facilmente che il quadrato di un numero intero non poteva essere doppio del quadrato di un altro [6]. Perciò la lunghezza del lato e quella della diagonale sono incommensurabili; ciò equivale a dire che comunque piccola si prenda

[6] La dimostrazione pitagorica è più o meno la seguente: supponiamo che sia possibile che il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato sia m/n, dove m e n sono numeri interi che non hanno nessun fattore comune. Allora dobbiamo avere $m^2=2n^2$. Ora, il quadrato di un numero dispari è dispari, ma dato che $m^2=2n^2$, m^2 deve essere pari. Quindi anche m deve essere pari. Ma il quadrato di un numero pari è divisibile per 4, perciò n^2, che è metà di m^2, deve essere pari. Perciò n deve essere pari. Ma dato che m è pari e m ed n non hanno alcun fattore comune, n deve essere dispari. Quindi n deve essere pari e dispari, il che è impossibile; e perciò la diagonale e il lato non possono avere un rapporto razionale.

l'unità di lunghezza, se è contenuta nel lato un numero esatto di volte, nella diagonale non è contenuta un numero esatto di volte, e viceversa.

Ora, se questo fatto poteva essere assimilato da alcuni filosofi senza gravi difficoltà, era assolutamente fatale alla filosofia di Pitagora. Pitagora sosteneva che il numero è la essenza costitutiva di tutte le cose, e tuttavia non c'erano due numeri che esprimessero il rapporto del lato del quadrato con la sua diagonale. Sembrerebbe probabile che, senza abbandonare il suo pensiero, possiamo ampliare questa difficoltà supponendo che egli considerasse la lunghezza di una retta determinata dal numero di atomi in essa contenuti — un segmento lungo due centimetri conterrebbe il doppio di atomi di un segmento lungo un centimetro, e così via. Ma se ciò fosse vero, allora vi dovrebbe essere un rapporto ben definito tra due lunghezze finite qualunque, perché s'è supposto che in ciascuna, per quanto grande sia, il numero di atomi deve essere finito. Qui c'entra una contraddizione insolubile. I Pitagorici, si dice, decisero di tenere accuratamente segreta l'esistenza degli incommensurabili, nota solo ad alcune delle menti supreme della setta; e si dice anche che uno dei loro membri, Ippaso di Metaponto, fu annegato in mare per aver rivelato empiamente ai loro nemici la terribile scoperta. Si deve ricordare che Pitagora fu fondatore di una nuova religione così come era maestro di una nuova scienza: se si arrivava a dubitare della scienza, i discepoli potevano cadere in peccato; ed anche forse mangiare fagioli, che secondo Pitagora era male come mangiare i corpi dei genitori.

Quando arrivò il momento, il problema sollevato dalla scoperta degli incommensurabili si mostrò uno dei più duri e allo stesso tempo uno di quelli di maggior portata che siano mai stati affrontati dall'intelletto umano nel suo sforzo di capire il mondo. Mostrò subito che la misurazione numerica delle lunghezze, se doveva essere esatta, richiedeva un'aritmetica molto più avanzata e molto più difficile di quella che possedevano gli antichi. Si misero perciò al lavoro per ricostruire la geometria su una base che non assumesse la possibilità universale della misurazione numerica — ricostruzione che, come si può vedere in Euclide, essi effettuarono con straordinaria capacità e grande acume logico. I moderni, sotto l'influsso della geometria cartesiana, hanno riaffermato la possibilità universale della misurazione numerica estendendo, in parte per questo scopo, l'aritmetica fino ad includere ciò che vengono chiamati numeri « irrazionali », che forniscono i rapporti di lunghezze incommensurabili. Ma benché gli irrazionali siano stati a lungo usati senza preoccupazione, è stato solo negli ultimi anni che ne è stata data una definizione logicamente soddisfacente. Con tale definizione, s'è risolta la forma iniziale e più evidente della difficoltà che si offrì ai Pitagorici; ma rimangono da considerare altre forme e son quelle che introducono il problema dell'infinità nella sua forma più pura.

Abbiamo visto che accettando la concezione che una lunghezza sia composta di punti, l'esistenza degli incommensurabili dimostra che ogni lunghezza finita contiene un numero infinito di punti. In altre parole, se dovessimo togliere i punti uno a uno, non potremmo mai togliere tutti i punti, per quanto a lungo si faccia continuare il processo. Perciò il numero dei punti non può essere *contato,* perché il contare è un processo che elenca le cose una ad una. La proprietà di non essere suscettibile di essere contato è caratteristica delle collezioni infinite, ed è l'origine di molte delle loro paradossali qualità. Queste qualità sono così paradossali che fino ai nostri giorni s'è pensato che costituissero delle contraddizioni logiche. Un gran numero di filosofi, da Zenone [7] a H. Bergson, hanno basato gran parte della loro metafisica sulla presunta impossibilità delle collezioni infinite. Parlando alla buona, le difficoltà furono enunciate da Zenone, e non è stato aggiunto nessun altro materiale fino ad arrivare ai *Paradoxien des Unendlichen* di Bolzano, una piccola opera scritta nel 1847-8, e pubblicata postuma nel 1851. I tentativi intermedi di trattare il problema sono futili e trascurabili. La soluzione definitiva di queste difficoltà si deve non a Bolzano, ma a Georg Cantor, la cui opera su questo tema apparve per la prima volta nel 1882.

Per comprendere Zenone, e per capire quanto poco abbia aggiunto la moderna metafisica ortodossa a ciò che

---

[7] Per quanto riguarda Zenone e i Pitagorici, ho tratto critiche ed informazioni molto notevoli dal P.E.B. JOURDAIN.

era stato raggiunto dai Greci, dobbiamo prendere in considerazione per un momento il suo maestro Parmenide, nel cui interesse furono inventati i paradossi [8]. Parmenide espose le sue convinzioni in due parti, dette « la strada della verità » e « la strada dell'opinione » — come l'« Apparenza » e la « Realtà » del Bradley, tranne che Parmenide prima ci parla della realtà e poi dell'apparenza. « La strada dell'opinione », nella sua filosofia, è approssimativamente il pitagorismo; comincia con un avvertimento: « Qui interromperò il mio pensiero e il mio discorso degno di fede sulla verità. D'ora in poi ascolterò le opinioni dei mortali, porgendo orecchio alla disposizione ingannevole delle mie parole ». Ciò che precedeva gli era stato rivelato da una dea, che gli ha detto quello che realmente *è*. La realtà, egli dice, è non creata, indistruttibile, immutabile, indivisibile; è « inamovibile dai vincoli di potenti catene, senza inizio e senza fine; perché il venire ad essere e lo scomparire sono stati spinti lontano, e la vera fede li ha gettati via ». Il principio fondamentale della sua indagine è enunciato in una frase che non sarebbe fuori posto in Hegel [9]: « Tu non puoi conoscere ciò che non è — che è impossibile — e neppure esprimerlo; perché è la stessa cosa che può essere pensata e che può essere ». E ancora: « È necessario che debba essere quello che di esso si può pensare o si può dire; perché è possibile che sia, e ciò che non è nulla non è possibile che sia ». Da questo principio segue l'impossibilità del mutamento, perché si può parlare di ciò che è passato, e quindi, per il principio, è ancora.

La grande concezione di una realtà oltre le passeggere illusioni dei sensi, una realtà unica, indivisibile e immutabile, fu così introdotta nella filosofia occidentale da Parmenide, e non sembrerebbe per ragioni mistiche o religiose, ma sulla base di un'argomentazione logica sull'impossibilità del non-essere. Tutti i grandi sistemi metafisici — notevolmente quelli di Platone di Spinoza e di Hegel — sono il risultato di quest'idea fondamentale. È difficile districare

[8] Così fa dire Platone a Zenone nel *Parmenide,* a proposito di tutta la sua filosofia; e tutte le prove esterne ed interne sono a favore di questo punto di vista.

[9] « Il filosofare » dice Hegel « comincia propriamente con Parmenide ». *Werke* (ediz. del 1840), vol. XIII, pag. 274.

la verità dall'errore in tale punto di vista. Io credo che si debba considerare la convinzione che il tempo non sia reale e che il mondo dei sensi è illusorio come basata su un ragionamento sbagliato. Tuttavia, c'è un qualche senso — facile da avvertire, ma non tanto da enunciare — in cui il tempo è una caratteristica della realtà non importante e superficiale. Si deve ammettere che il passato e il futuro sono reali come il presente, ed essenziale per il pensiero filosofico è una certa emancipazione dalla schiavitù del tempo. L'importanza del tempo è più pratica che teorica, più in rapporto ai nostri desideri che alla verità. Io credo che un'immagine più vera del mondo la si ottenga disegnando le cose come se entrassero nel flusso del tempo da un mondo eterno che sta fuori, piuttosto che un punto di vista che consideri il tempo come un tiranno che divora tutto ciò che è. Sia nel pensiero che nei sentimenti, il ponte gettato verso la saggezza è capire la poca importanza del tempo. Ma essere poco importante non significa non essere reale; e perciò quello che avremo da dire delle argomentazioni di Zenone in favore di Parmenide, deve essere in gran parte critico.

Il rapporto tra Zenone e Parmenide è spiegato da Platone [10] nel dialogo in cui Socrate, da giovane, apprende acume logico e filosofico distacco dalla loro dialettica. Cito dalla traduzione di Jowett:

« Vedo, o Parmenide, disse Socrate, che Zenone è il tuo secondo io anche nei suoi scritti; egli pone in altro modo ciò che dice e vorrebbe volentieri farci credere che ci dice cose nuove. Perché, nelle tue poesie, dici che Tutto è unico; e di questo porti eccellenti dimostrazioni; e d'altra parte lui afferma che non c'è molteplicità; e in favore di questo offre prove schiaccianti. Ingannare il mondo, come voi avete fatto, dicendo la stessa cosa in modi diversi, uno di voi che afferma l'unità, e l'altro che nega la molteplicità, è uno spingere l'arte al di là di quello che gran parte di noi può raggiungere.

« Sì, Socrate, disse Zenone. Ma anche se tu sei accanito come un cacciatore spartano che insegue una traccia, non riesci a comprendere il vero motivo della composizione, che in realtà non è un'opera così ambiziosa come tu credi;

[10] *Parmenide,* 128 A-D.

perché quello di cui parli è stato un caso; non avevo alcuna seria intenzione di ingannare il mondo. La verità è che questi miei scritti intendevano proteggere le argomentazioni di Parmenide contro coloro che si fanno beffa di lui e che mostrano i risultati ridicoli e contraddittori che presumono seguano dall'affermazione dell'unico. La mia risposta è rivolta ai partigiani della molteplicità, il cui attacco restituisco ad usura ritorcendo su di essi che le loro ipotesi dell'essere del molteplice, se messe in pratica, appaiono in una luce ancor più ridicola di quella dell'ipotesi dell'essere dell'unico ».

I quattro argomenti di Zenone contro il moto intendevano mostrare le contraddizioni che risultano dal supporre che vi sia una cosa come il mutamento, e dare così un'ulteriore conferma della dottrina parmenidea che la realtà è immutabile [11]. Sfortunatamente, siamo venuti a conoscenza delle sue argomentazioni attraverso Aristotele [12], che le enunciò allo scopo di confutarle. Quei filosofi del giorno d'oggi le cui dottrine sono state esposte dai loro oppositori, ben capiranno come sia difficile aspettarsi da Aristotele una presentazione giusta o adeguata della posizione di Zenone; ma con un po' di attenzione nell'interpretazione sembra possibile ricostruire i cosiddetti « sofismi » che sono stati « confutati » da ogni principiante da allora ad oggi.

Le argomentazioni di Zenone sembrerebbero « ad hominem »; vale a dire, sembrano assumere premesse ammesse dai suoi oppositori per mostrare che, una volta poste, è possibile dedurne conseguenze che devono essere negate dai suoi oppositori. Allo scopo di decidere se sono argomenti validi oppure « sofismi », è necessario fare delle congetture sulle tacite premesse per stabilire chi era quel « homo » al quale erano indirizzate. Alcuni sostengono che prendevano di mira i Pitagorici [13], mentre altri sostengono che intende-

[11] Questa interpretazione è combattuta da MILHAUD, *Les philosophes-géomètres de la Grèce*, pag. 140, n., ma non mi sembra che le sue ragioni siano convincenti. In ciò che segue, tutte le interpretazioni sono aperte a questioni, ma hanno tutte il sostegno di autorità rispettabili.

[12] *Fisica*, VI 9. 2396 (R. P. 136-139).

[13] Cfr. GASTON MILHAUD, *Les philosophes-géomètres de la Grece*, pag. 140 n.; PAUL TANNERY, *Pour l'histoire de la science hellène*, pag. 249; BURNET, op. cit., pag. 362.

vano confutare gli atomisti [14]. M. Evellin, al contrario, sostiene che costituiscono una confutazione della divisibilità infinita [15], mentre M.G. Noël, che prende le parti di Hegel, afferma che i primi due argomenti confutano la divisibilità infinita, mentre gli altri due confutano l'indivisibilità [16]. In una varietà così sconcertante di interpretazioni, almeno non abbiamo da lamentarci di restrizioni nella libertà di scelta.

Le questioni storiche che hanno avuto origine dalle precedenti discussioni senza dubbio sono largamente insolubili, a causa del materiale molto scarso dal quale deriva tutto quello che sappiamo. I punti che sembrano abbastanza chiari sono i seguenti: 1) Che, malgrado MM. Milhaud e Paul Tannery, Zenone desidera mostrare che il moto è realmente impossibile, e questo perché segue Parmenide nel negare la pluralità [17]; 2) che il terzo e il quarto argomento continua con l'ipotesi dell'indivisibile, ipotesi che, sia che fosse adottata dai Pitagorici sia che non lo fosse, è certo sia stata da molti adottata, come si può vedere dal trattato *Sulle rette indivisibili* attribuito ad Aristotele. Per quanto riguarda i primi due argomenti, sembrerebbero validi sulla base dell'ipotesi degli indivisibili, e senza quest'ipotesi, anche tali che sarebbero validi se le tradizionali contraddizioni dei numeri infiniti fossero insolubili, ciò che invece non sono.

Possiamo perciò concludere che la polemica di Zenone è diretta contro il punto di vista che considera lo spazio composto di punti e di istanti; e che per quanto riguarda la confutazione del punto di vista che un tratto finito di tempo o di spazio consiste di un numero finito di punti e

[14] Cfr. R.K. GAYE, *On Aristotle, Physics, Z. IX.* « Journal of Philology », vol. XXXI, spec. pag. 111. Anche MORITZ CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 1ª ediz., vol. I, 1880, pag. 168, il quale tuttavia in seguito adottò la visione del TANNERY, *Vorlesungen*, 3ª ediz. (vol. I, pag. 200).

[15] *Le mouvement et les partisans des indivisibles*, « Revue de Métaphysique et de Morale », vol. I, pagg. 382-395.

[16] *Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée*, « Revue de Métaphysique et de Morale », vol. I, pagg. 107-125.

[17] Cfr. N. BROCHARD, *Les prétendus sophismes de Zénon d'Elée*, « Revue de Métaphysique et de Morale », vol. I, pagg. 209-215.

di istanti, i suoi argomenti non sono sofismi, ma sono perfettamente validi.

La conclusione alla quale desidera portarci Zenone è che la pluralità è un'illusione, e gli spazi e i tempi sono realmente indivisibili. L'altra conclusione possibile, e precisamente che il numero dei punti e degli istanti è infinito, non era sostenibile finché l'infinito era affetto da contraddizioni. In un frammento che non è uno dei quattro argomenti famosi contro il moto, Zenone dice:

« Se le cose sono una moltitudine, devono essere tante quante sono, non di più né di meno. Ora, se sono tante quante sono, esse devono essere in numero finito.

« Se le cose sono una moltitudine, saranno in numero infinito; perché vi saranno sempre altre cose fra di esse, ed altre ancora fra queste. E così le cose sono in numero infinito » [18].

Questo argomento tenta di dimostrare che se vi sono molte cose, il loro numero deve essere sia finito che infinito, che è impossibile; dovremmo quindi concludere che esiste una sola cosa. Ma il punto debole è l'espressione: « Se sono quante sono, saranno in numero finito ». Non è molto chiara, ma è specifico che presume l'impossibilità di numeri infiniti ben definiti. Senza quest'assunzione, che ora sappiamo falsa, gli argomenti di Zenone, benché sufficienti (con certe assunzioni molto ragionevoli) a dissipare l'ipotesi di indivisibilità finite, non sono sufficienti a dimostrare che il moto, il mutamento e la pluralità sono impossibili. Da qualunque parte li si guardi, non sono tuttavia meri giochi di parole pazzeschi: sono argomenti seri che sollevano difficoltà che hanno richiesto duemila anni per essere risolte, e che ancora sono fatali agli insegnamenti di gran parte dei filosofi.

Il primo argomento di Zenone è quello della gara di corsa, che è parafrasato da Burnet come segue [19]:

« Non si può arrivare alla fine di una gara di corsa. Non si può attraversare un numero infinito di punti in un tempo finito. Prima di aver attraversato tutta una data distanza, bisogna passare per la metà, e ancora per la metà della metà, prima di poter passare per la metà. Si prosegue così *ad infinitum,* di modo che in un dato spazio vi sono un numero infinito di punti e in un tempo finito non è possibile toccarli uno per uno » [20].

Qui Zenone fa appello in primo luogo al fatto che si può dividere a metà qualunque distanza comunque piccola. Da ciò naturalmente segue che in una retta vi devono essere infiniti punti. Ma Aristotele ce lo presenta come se dicesse che non si può toccare, in un periodo di tempo finito, un numero infinito di punti *uno per uno.* Le parole « uno per uno » sono importanti. 1) Se si parla di *tutti* i punti toccati, allora, anche se si passa in modo continuo per loro, non li si tocca « uno per uno ». Vale a dire, dopo averne toccato uno, non ce n'è un altro successivo da toccare: non ci sono punti successivi l'uno all'altro, ma tra due qualunque ve ne sono un numero infinito di altri, che non possono essere elencati l'uno dopo l'altro. 2) Se, d'altra parte, si parla dei punti medi successivi ottenuti dividendo sempre a metà ciò che rimane del percorso, allora i punti sono

[18] SIMPLICIUS, *Fis.,* 140, 28 D (R. P. 133); BURNET, *op. cit.,* pagg. 364-365.

[19] *Op. cit.,* pag. 367.

[20] Le parole di Aristotele sono: « Il primo è quello sulla non esistenza del moto sulla base che ciò che si muove deve sempre raggiungere la metà più vicina all'estremità, argomento sul quale ci siamo espressi nella prima parte del nostro discorso ». *Fis.* VI 9. 939B (R. P. 136). Sembra che Aristotele si riferisca a *Fis.* VI 2 223AB (R. P. 136A): « Tutto lo spazio è continuo perché lo spazio e il tempo si dividono nelle stesse ed uguali divisioni. ..... Perciò anche l'argomento di Zenone è errato, che è impossibile attraversare una collezione infinita oppure in un tempo finito toccare uno per uno tutti i termini di una collezione infinita. Perché vi sono due sensi nei quali si adopera la parola « infinito » sia riguardo alla lunghezza che al tempo, e in effetti a tutte le cose continue, o nei confronti della divisibilità o nei confronti degli estremi. Ora, in un tempo finito, non è possibile toccare cose infinite per quanto riguarda la divisibilità: perché in tale senso anche il tempo è infinito. In modo che infatti attraversiamo uno (spazio) infinito in un (tempo) infinito, e non in un (tempo) finito, e con cose infinite, e non con cose finite, tocchiamo cose infinite ». Filopono, un commentatore del sesto secolo (R. P. 136A, *Exc. Paris Philop. in Arist. Phys.,* 803, 2 Vit.) ne dà la seguente illustrazione: « Perché se una cosa si muovesse dello spazio di un cubito in un'ora, dato che in ogni spazio vi è un numero infinito di punti, la cosa che si muove deve per necessità toccare tutti i punti dello spazio: attraverserebbe allora una collezione infinita in un tempo finito, che è impossibile ».

raggiunti uno ad uno, e benché siano in numero infinito, in effetti sono raggiunti tutti in un tempo finito. Al contrario, si può presumere che il suo argomento s'appigli alla convinzione che un tempo finito debba consistere di un numero finito di istanti, nel qual caso ciò che dice sarebbe perfettamente vero sulla base dell'assunzione che la possibilità di una dicotomia continua è innegabile. Se, d'altra parte, supponiamo che l'argomento sia diretto contro i partigiani della divisibilità infinita, dobbiamo supporre che esso sia come segue[21]: « I punti dati dalla divisione successiva a metà delle distanze ancora da attraversare sono in numero infinito, e sono raggiunti in successione, essendo ciascuno raggiunto in un tempo finito posteriore al suo predecessore; ma la somma di un numero infinito di tempi finiti deve essere infinita, e perciò il processo non sarà mai portato a termine ». È possibilissimo che questa, storicamente, sia la giusta interpretazione, ma in questa forma l'argomento non è valido. Se metà del percorso richiede mezzo minuto, e il prossimo quarto richiede un quarto di minuto, e così via, l'intera corsa richiederà un minuto. L'apparente forza di questo argomento sta, secondo questa interpretazione, semplicemente nell'errata supposizione che non vi può essere nulla in mezzo a tutta una serie infinita, e si può veder che ciò è falso osservando che 1 è al di là di tutta la serie infinita 1/2, 3/4, 7/8, 15/16, ...

Il secondo argomento di Zenone è quello che riguarda Achille e la tartaruga, che ha avuto più notorietà degli altri. Il Burnet lo parafrasa come segue[22]:

« Achille non supererà mai la tartaruga. Prima egli deve raggiungere il posto dal quale è partita la tartaruga. In quel periodo di tempo, la tartaruga avrà guadagnato un'altra posizione. Allora Achille deve arrivare fino a quella, ed ancora la tartaruga è in testa. Egli si avvicina sempre di più, ma non la raggiungerà mai »[23].

[21] Cfr. il BROAD, *Note on Achilles and the Tortoise*, « Mind », N. S., vol. XXII, pagg. 318-9.

[22] Op. cit.

[23] Le parole di Aristotele sono: « Il secondo è il cosiddetto Achille. Consiste in ciò, che il più lento nella sua corsa non verrà mai raggiunto dal più veloce, perché l'inseguitore prima deve sempre arrivare al punto che l'inseguito ha appena lasciato cosicché il più lento deve necessariamente essere sempre più o meno in anticipo ». *Fis.*, VI 9 239B (R. P. 137).

Questo argomento è essenzialmente lo stesso del precedente. Mostra che se mai Achille oltrepassasse la tartaruga, ciò dovrebbe accadere dopo che è passato un numero infinito di istanti da quando è partito. Infatti questo è vero; ma non è vero che un numero infinito di istanti forma un tempo infinitamente lungo, e non ne segue perciò la conclusione che Achille non sorpasserà mai la tartaruga.

Il terzo argomento[24], quello della freccia, è molto interessante. Sul testo ci sono stati dei problemi. Burnet accetta le alterazioni di Zeller, e lo parafrasa così:

« La freccia in volo è in quiete. Perché, se ogni cosa che occupa uno spazio uguale a se stesso è in quiete, e ciò che è in volo in un dato momento occupa uno spazio uguale a se stesso, non può muoversi ».

Ma secondo Prantl, la traduzione letterale del testo non emendato dell'enunciato di Aristotele, è come segue: « Se ogni cosa che si comporti in una maniera uniforme, è continuamente o in moto o in quiete, ma ciò che si muove, si muove sempre *ora*, allora la freccia che si muove è immobile ». Questa forma dell'argomento dimostra la sua forza con maggior chiarezza della parafrasi di Burnet.

Qui, se non anche nei due primi argomenti, sembra che si assuma il punto di vista che una parte finita di tempo consti di una serie finita di istanti successivi; in ogni modo la plausibilità dell'argomento sembra dipendere dal presumere che vi sono istanti consecutivi. Per tutto un istante, si dice, un corpo che si muove sta dov'è: non si può muovere durante l'istante, perché ciò richiederebbe che l'istante ha parti. Supponiamo quindi di considerare un periodo di un migliaio di istanti, e supponiamo che la freccia sia in volo per tutto questo periodo. In ciascuno di questi mille istanti, la freccia sta dov'è benché nell'istante successivo sia in un altro posto. Non si muove mai, ma in qualche maniera miracolosa il mutamento di posizione deve avvenire *tra* un istante e un altro, vale a dire in nessun istante affatto. È questa quella che H. Bergson chiama la

[24] *Fis.*, VI 9 239B (R. P. 138).

rappresentazione cinematografica della realtà. Più si medita la difficoltà e più diventa reale. La soluzione sta nella teoria delle serie continue: abbiamo trovato difficile evitare di supporre che quando la freccia è in volo, vi sia una posizione *successiva* occupata nel momento *successivo;* ma in effetti non c'è né posizione successiva né momento successivo, e una volta capito questo, si vede che la difficoltà scompare.

Il quarto e ultimo argomento di Zenone [25] è quello dello stadio.

L'argomento, come posto da Burnet, è come segue:

Prima posizione	Seconda posizione
A	A . . . .
B	B . . . .
C	C . . . .

« Metà del tempo deve essere uguale al doppio del tempo. Supponiamo vi siano tre file di corpi, una delle quali (A) stia ferma mentre le altre due (B, C) si muovono con velocità uguali in direzioni opposte. Rispetto al tempo in cui erano tutte nella stessa parte del percorso, B avrà passato il doppio dei corpi di C che in A. Perciò il tempo che impiega per passare C è il doppio del tempo che impiega per passare A. Ma il tempo che impiegano B e C per raggiungere la posizione di A è lo stesso. Perciò il doppio del tempo è uguale alla metà ».

Gaye [26] dedicò un interessante articolo all'interpretazione di questo argomento. La sua traduzione dell'enunciato di Aristotele è come segue:

« Il quarto argomento riguarda le due file di corpi, ciascuna fila essendo composta dello stesso numero di corpi di uguali dimensioni, che si sorpassano l'un l'altro in una gara di corsa in cui procedono con velocità uguali in direzioni opposte, una fila occupando all'inizio lo spazio tra la mèta e il punto medio del percorso, e l'altra quello tra il punto medio e la partenza. Ciò, egli pensa, implica la conclusione che metà di un dato tempo sia uguale al suo doppio. L'errore del ragionamento sta nell'ipotesi che un corpo impieghi un tempo uguale nel sorpassare con uguale velocità un corpo in moto e un corpo delle stesse dimensioni che sta fermo, assunzione che è falsa. Per fare un esempio (sul quale gioca l'argomento), siano AA . . . i corpi di uguale grandezza che stanno fermi, BB . . . i corpi, uguali per numero e per dimensioni a AA . . ., che originariamente occupano il punto medio del percorso dalla partenza a metà degli A, e CC . . . quelli che originariamente occupano l'altra metà degli A, uguali per numero, dimensione e velocità a BB . . . Ne seguono allora tre conseguenze. Primo, dato che i B e i C si sorpassano l'un l'altro, il primo B raggiunge l'ultimo C nello stesso momento in cui il primo C raggiunge l'ultimo B. In secondo luogo, in questo momento il primo C ha passato tutti gli A, mentre il primo B ha passato solo metà degli A e di conseguenza ha impiegato solo metà del tempo impiegato dal primo C, dato che ciascuno dei due ci mette lo stesso tempo a passare ciascun A. In terzo luogo, nello stesso momento tutti i B hanno passato tutti i C: perché il primo C e il primo B raggiungeranno simultaneamente gli estremi opposti del percorso, dato che (così dice Zenone) il tempo impiegato dal primo C a passare ciascuno dei B è uguale a quello che impiega per passare ciascuno degli A, poiché sia il primo dei B che il primo dei C impiegano lo stesso tempo per passare tutti gli A. Tale è l'argomento: ma esso presuppone la suddetta ipotesi erronea ».

Questo argomento non è proprio facile da seguire, e non vale solo contro l'assunzione che un tempo finito consiste di un numero finito di istanti. Possiamo rienunciarlo con un linguaggio diverso. Supponiamo di prendere tre sergenti istruttori, A, A' e A'', posti in fila, mentre le due file di soldati marciano dopo

prima posizione			seconda posizione				
B	B'	B''					
A	A'	A''					
C	C'	C''					

prima posizione	seconda posizione
B B' B''	B B' B''
A A' A''	A A' A''
C C' C''	C C' C''

[25] *Fis.*, VI 9 239B (R. P. 139).
[26] *Loc. cit.*

di essi in direzioni opposte. Nel primo momento che prendiamo in considerazione, i tre uomini B, B', B'', di una fila, e i tre uomini dell'altra fila, sono rispettivamente opposti ad A, A', A''. Nel momento immediatamente successivo, ciascuna fila si è mossa, ed ora opposti ad A' sono B e B''. Così B e C sono l'uno opposto all'altro. Quand'è, allora, che B ha passato C'? Deve essere stato in un qualche cosa intermedio tra i due momenti che abbiamo presunto consecutivi, e quindi in realtà i due momenti non potevano essere consecutivi. Ne segue che tra due dati momenti ve ne devono essere degli altri e perciò che in un dato intervallo qualunque ci deve essere un numero infinito di momenti.

La suddetta difficoltà, che B debba aver passato C' in un qualche momento intermedio tra i due momenti consecutivi, è genuina, ma non è quella sollevata da Zenone. Ciò che Zenone afferma di dimostrare è che « metà di un dato tempo è il doppio di quel tempo stesso ». La spiegazione più comprensibile che conosca di questo argomento è quella di Gaye [27]. Dato che, tuttavia, la sua spiegazione non è affatto facile da esporre in breve, riaffermerò che essa sia l'essenza logica dell'intenzione di Zenone. Se supponiamo che il tempo consti di una serie di istanti consecutivi, e che il moto consti nel passaggio attraverso una serie di punti consecutivi, allora il moto più rapido possibile è quello che in ciascun istante è in un punto consecutivo a quello nel quale era nell'istante precedente. Tutti i moti più lenti devono essere tali da avere degli intervalli di quiete sparsi qua e là, ed ogni moto più rapido deve saltare completamente qualche punto. Tutto ciò appare dal fatto che non possiamo avere più di un evento per ciascun istante. Orbene, nel caso dei nostri A, B e C, B è opposto ad un nuovo A in ogni istante, e perciò il numero degli A passati dà il numero di istanti passati dall'inizio del moto. Ma durante il moto, B ha passato il doppio dei C, e tuttavia in ciascun istante non ne ha passati più di uno solo. Quindi il numero di istanti sin dall'inizio del moto è il doppio del numero degli A passati, benché in precedenza abbiamo

[27] *Loc. cit.*, pag. 105.

trovato che era uguale a questo numero. Da questo risultato segue la conclusione di Zenone.

Gli argomenti di Zenone, in qualche forma, hanno fornito i motivi fondamentali per quasi tutte le teorie dello spazio, del tempo e dell'infinito che son state costruite da allora ad oggi. Abbiamo visto che (con certe ipotesi ragionevoli) tutti i suoi argomenti sono validi sulla base dell'assunzione che spazi e tempi finiti consistono di un numero finito di punti e di istanti, e che in effetti il terzo e il quarto si basano su questa assunzione, mentre il primo e il secondo, intesi forse a confutare opposte ipotesi, erano in tale caso erronee. Possiamo perciò sfuggire da questi paradossi o affermando che, benché spazio e tempo consistano di punti e istanti, in un qualunque intervallo finito essi sono infiniti; oppure negando che spazio e tempo consistano di punti e istanti; o infine negando l'intera realtà dello spazio e del tempo. Sembrerebbe che lo stesso Zenone, come difensore di Parmenide, abbia disdegnato l'ultima di queste tre possibili deduzioni, in ogni modo lo ha fatto nei confronti del tempo. In questo è stato seguito da un gran numero di filosofi. Molti altri, come Bergson, hanno preferito negare che lo spazio e il tempo consistano di punti e istanti. Qualunque soluzione di questo genere incontrerà le difficoltà nella forma in cui le ha poste Zenone. Ma, come abbiamo visto, difficoltà sorgono anche se si ammettono numeri infiniti. E in ogni caso, per motivi indipendenti dallo spazio e il tempo, si devono ammettere i numeri infiniti e le serie in cui non vi sono termini consecutivi. Consideriamo, per esempio, tutte le frazioni minori di 1 poste in ordine di grandezza. Tra due qualunque di esse ve ne sono delle altre, per esempio la media aritmetica delle due. Così due qualunque frazioni non sono consecutive, e il loro numero totale è infinito. Si vedrà che gran parte di quello che dice Zenone riguardo alle serie di punti su una retta è possibile applicarlo alle serie di frazioni. E non possiamo negare che ci sono le frazioni, cosicché due delle vie d'uscita ci vengono precluse. Ne segue che se vogliamo risolvere l'intera classe di difficoltà che per analogia derivano da quella di Zenone, dobbiamo scoprire qualche teoria sostenibile dei numeri infiniti. Quali sono allora le difficoltà che fecero credere ai filosofi fino agli ultimi trent'anni che i numeri infiniti erano impossibili?

Le difficoltà dell'infinità sono di due generi, di cui il primo si può dire fittizio, mentre le altre, per essere risolte, richiedono una certa quantità di nuovo pensiero niente affatto facile. Le difficoltà fittizie sono quelle suggerite dall'etimologia e dalla confusione dell'infinito matematico con quello che inappropriatamente chiamano « vero » infinito. Etimologicamente, « infinito » significherebbe « che non ha fine ». Ma in effetti, alcune serie infinite hanno degli estremi, mentre altre no; mentre alcune collezioni sono infinite senza essere seriali, e perciò non si può propriamente dire con o senza estremi. La serie di istanti da uno precedente ad uno successivo (compresi) è infinita, ma ha due estremi; la serie degli istanti dagli inizi del tempo fino ai nostri giorni ha un estremo, ma è infinita. Nella sua prima antinomia, Kant sembra sostenga che è più difficile che sia infinito il passato piuttosto che il futuro, per il motivo che il passato ora è completo, e che nessun infinito può essere completato. È molto difficile immaginare un qualche senso in quest'osservazione; ma il più probabile sembra che sia che egli pensava all'infinito come « incompiuto ». È strano che non abbia pensato che anche il futuro ha un termine nel presente, ed è precisamente allo stesso livello del passato. Il fatto che li consideri differenti sotto questo aspetto illustra proprio quel genere di schiavitù al tempo che, come s'è detto parlando di Parmenide, il vero filosofo deve imparare a lasciare indietro.

Sono singolari le confusioni introdotte nelle cognizioni dei filosofi dal cosiddetto « vero » infinito. S'accorgono che questa nozione non è la stessa dell'infinito matematico, ma hanno deciso di credere che è questa la nozione che invano i matematici tentano di cercare. Perciò essi informano i matematici gentilmente ma con fermezza, che essi si sbagliano nell'aderire al « falso » infinito, dato che è chiaro che il « vero » infinito è qualcosa di completamente differente. La risposta a questo è che ciò che essi chiamano « vero » infinito è una nozione completamente irrilevante per il problema dell'infinito matematico, col quale ha un'analogia solo immaginaria e verbale. Essa è così lontana che mi propongo di non confonderli non citando mai il « vero » infinito. È il « falso » infinito quello di cui ci dobbiamo occupare, e dobbiamo mostrare che l'epiteto « falso » è immeritato.

Per capire l'infinito, s'incontrano tuttavia delle difficoltà genuine, certe abitudini mentali che derivano dalla considerazione dei numeri finiti, ed estese ai numeri infiniti dietro l'errata convinzione che esse rappresentino delle necessità logiche. Per esempio, ogni numero al quale siamo abituati, tranne lo 0, ha un altro numero immediatamente precedente ad esso, dal quale è tratto con l'addizione di 1; ma il primo numero infinito non ha questa proprietà. I numeri ad esso precedenti formano una serie infinita che contiene tutti i numeri finiti ordinari, che non ha massimo, nessun ultimo numero finito dopo il quale un altro piccolo passo ci farebbe precipitare nell'infinito. Se si suppone di raggiungere il primo numero infinito con una successione di piccoli passi, è facile dimostrare che ciò è auto-contraddittorio. In effetti, il primo numero infinito è oltre la serie senza fine dei numeri finiti. « Ma » si dirà, « non ci può essere nulla al di là di tutta una serie senza fine ». Si può notare che è proprio questo il principio sul quale si basa Zenone nell'argomento della gara di corsa e in quello di Achille. Prendiamo la gara di corsa: vi è un momento in cui il corridore ha da percorrere ancora metà della distanza, poi un momento in cui ne ha un quarto, poi uno in cui ne ha un ottavo, e così via in una serie strettamente interminabile. Al di là di tutta questa serie c'è il momento in cui raggiunge la mèta. Vi può quindi essere certamente qualcosa oltre tutta la serie senza fine. Ma resta da mostrare che questo fatto è tutto ciò che ci si poteva aspettare.

Io credo che, come gran parte delle più vaghe difficoltà che assediano l'infinito matematico, questa derivi dall'idea più o meno conscia dell'operazione di *contare*. Se ci si pone a contare i termini di una serie infinita, tale compito non sarà mai portato a termine. Così, nel caso del corridore, se si marcasse la metà, i tre quarti, i sette ottavi, e così via, del percorso, e al corridore non si permettesse di passare ciascun segno finché l'arbitro non dicesse « Ora », allora la conclusione di Zenone sarebbe vera nella pratica, e il corridore non arriverebbe mai alla mèta.

Ma per l'esistenza di una collezione, o anche per la sua conoscenza e per ragionarci su, non è essenziale essere in grado di passare in rivista i termini uno per uno. Può sembrare che ciò valga per le collezioni finite; possiamo parlare di « umanità » o di « razza umana » anche se non conosciamo personalmente molti degli individui di questa collezione. Possiamo farlo perché conosciamo varie caratteristiche che ogni individuo ha se appartiene alla collezione, e che non ha se non vi appartiene. Ed esattamente lo stesso accade nel caso delle collezioni infinite: si possono conoscere attraverso le loro caratteristiche anche se non è possibile enumerare i loro termini. In questo senso, una serie incompleta può sempre formare un tutto, e vi possono essere nuovi termini oltre di essa.

Possono causare perplessità anche alcune peculiarità aritmetiche dei numeri infiniti. Per esempio, un numero infinito non cresce aggiungendogli uno, o raddoppiandolo. Sembrava che queste peculiarità contraddissero la logica, ma in effetti esse contraddicono solo delle abitudini mentali inveterate. Tutta la difficoltà del soggetto sta nella necessità di pensare in una maniera non familiare, e nel capire che molte proprietà che si pensava inerenti ai numeri, in effetti sono peculiari dei numeri finiti. Se si tiene presente ciò, la teoria positiva dell'infinito di cui ci occuperemo nella prossima conferenza, non apparirà così difficile come appare a coloro che si piegano ostinatamente ai pregiudizi istillati dall'aritmetica che s'impara in gioventù.

Settima Conferenza

LA TEORIA POSITIVA DELL'INFINITO

La teoria positiva dell'infinito, e la teoria generale del numero alla quale ha dato origine, sono dei trionfi del metodo scientifico applicato alla filosofia, e sono quindi particolarmente adatti ad illustrare il carattere logico-analitico di tale metodo. Il lavoro in tale campo è stato fatto dai matematici, e se ne possono esprimere i risultati col simbolismo matematico. Perché allora, si può dire, si dovrebbe considerare il tema filosofico piuttosto che matematico? Ciò fa sorgere una difficile questione, in parte sull'uso delle parole, ma in parte anche di reale importanza per capire la funzione della filosofia. Sembrerebbe che ogni soggetto possa dar luogo ad investigazioni filosofiche così come alla scienza adatta, la differenza fra le due essendo nella direzione nella quale si muovono e nel genere delle verità che si intende stabilire. Nelle scienze speciali, quando son diventate completamente sviluppate, il movimento è in avanti e sintetico, dal più semplice al più complesso. Ma in filosofia seguiamo la direzione opposta: dal complesso e relativamente concreto con l'analisi procediamo verso il semplice ed astratto, cercando, in tale processo, di eliminare la particolarità del soggetto iniziale, e di concentrare la nostra attenzione esclusivamente alla *forma* logica dei fatti di cui ci occupiamo.

Tra filosofia e matematica c'è una certa affinità nel fatto che ambedue sono generali e *a priori*. Nessuna di esse afferma proposizioni che, come nella storia e nella geografia, dipendono da fatti concreti ed effettivi che sono quel che sono. Possiamo illustrare questa caratteristica per mezzo della concezione di Leibniz di molti mondi *possibili*, di cui uno solo è *effettivo*. In tutti i mondi possibili, la filosofia e