Domande e spiegazioni scientifiche
Primo esempio

Gianluigi Bellin

October 21, 2009

Perché la somma dei primi n numeri dispary è uguale a n^2?

$$\sum_{0<i\leq n} (2i-1) \ = \ n^2$$

Risposta: Segue per deduzione logica dalle proprieta‘ degli interi positivi $\mathbf{N}$.
1. Prova algebrica: Per ogni i, con $0 < i \leq n$ vale

$$(2i-1)+2(n-i)+1 = 2n,$$

dunque

$\sum_{0<i\leq n}[(2i-1)+2(n-i)+1] =$

$= 2n \cdot n$

(poiché in questa somma ogni numero è contato due volte)
$= 2 \cdot \sum_{0<i\leq n}(2i-1)$

dunque $\sum_{0<i\leq n}(2i-1) = n^2$.

2. Prova per induzione sui numeri naturali. L'idea che giustifica il principio di induzione matematica è la seguente. I numeri naturali sono generati a partire da *zero* per applicazione ripetuta della funzione *successore*, cioè [1]

$$0, \quad , s(0), \quad , s(s(0)), \quad , s(s(s(0))), \ldots ;$$

ora se si dimostra che una proprietà $\varphi(x)$ è valida per il numero zero[2] il numero 1], ed inoltre, assumendo che la proprietà $\varphi(x)$ vale per il numero n si riesce a dimostrare che vale per il numero $s(n)$, allora si può concludere la poprieta‘ vale per *ogni* numero naturale. Infatti, se suppongo di avere due prove d_0 e d_s della forma

$$\begin{array}{ccc} d_0 & \qquad & d_s \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(0) & & \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1) \end{array}$$

[1]Sto assumendo che il numero k è generato da zero con k applicazioni della funzione successore, cioè $k = s^k(0)$ dove $s^0(x) = x$ e $s^{n+1}(x) = s(s^n(x))$, e tutti i numeri naturali siano ottenuti *solamente* in questo modo.

[2]Talvolta cominciamo l'induzione dal numero 1.

allora posso dimostrare $\varphi(k)$ come segue:

$$
\dfrac{\begin{matrix} \dfrac{\dfrac{\begin{matrix} d_0 \\ \vdots \\ \varphi(0) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d_s \\ \vdots \\ \varphi(0) \Rightarrow \varphi(1) \end{matrix}}{\varphi(1)} \qquad \begin{matrix} d_s \\ \vdots \\ \varphi(1) \Rightarrow \varphi(2) \end{matrix}}{\varphi(2)} \\ \vdots \\ \varphi(k-1) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} d_s \\ \vdots \\ \varphi(k-1) \Rightarrow \varphi(k) \end{matrix}}{\varphi(k)}
$$

Ora dimostriamo la nostra equazione per induzione. Per $n = 1$ abbiamo (*caso base*)

$$\sum_{0<i\leq 1} (2i-1) = 1 = 1^2.$$

Supponiamo (*ipotesi induttiva*)

$$\sum_{0<i\leq n} (2i-1) = n^2.$$

Allora (*passo induttivo*)

$$\textstyle\sum_{0<i\leq n+1}[(2i-1) = (\sum_{0<i\leq n}) + 2(n+1) - 1 =$$

$$= n^2 + 2(n+1) - 1 \qquad \text{(per ipotesi induttiva)}$$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Poiché l'enunciato è vero nel caso base e rimane vero nel passo induttivo, concludiamo che vale per tutti i numeri naturali.