Calcoli dei sequenti classici e lineare

Gianluigi Bellin

November 5, 2009

Scheda per il compito 2, scadenza rinviata al marteedì 10 novembre 2009

1 Calcolo dei sequenti classico

1.1 Linguaggio ed interpretazione

Il linguaggio della logica classica è costruito a partire da un insieme di formule atomiche p, p_1, p_2, ... e da una la costante logica $\bot$, che indica una proposizione che è sempre falsa, usando i connettivi "$\neg$" (*negazione*), "$\wedge$" (*congiunzione*), "$\rightarrow$" (*implicazione*) e "$\vee$" (*disgiunzione*). La grammatica del nostro linguaggio si può scrivere così:

$$A := \; p \mid \bot \mid \neg A \mid A_1 \wedge A_2 \mid A_1 \rightarrow A_2 \mid A_1 \vee A_2$$

La *semantica* del nostro linguaggio è definita assegnando *valori di verità* V o F alle formule atomiche: sia $\mathcal{I}$ una tale assegnazione. Ora possiamo dire quale valore di verità è assegnato alle formule composte, usando le tabelle di verità:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$\neg A$
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Per esempio, sia

$$A = ((p \rightarrow q) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow \neg p)) \rightarrow \neg(p \wedge r)$$

e supponiamo che $\mathcal{I}$ renda p vera, q falsa e r vera – troviamo utile scrivere $p_{\mathcal{I}} = V$, $q_{\mathcal{I}} = F$, $r_{\mathcal{I}} = V$. Allora possiamo calcolare il valore assegnato da $\mathcal{I}$ ad A come segue:

$$
\begin{array}{rcl}
A_{\mathcal{I}} & = & ((p_{\mathcal{I}} \to q_{\mathcal{I}}) \land ((q_{\mathcal{I}} \land r_{\mathcal{I}}) \to \neg p_{\mathcal{I}}) \to \neg(p_{\mathcal{I}} \land r_{\mathcal{I}}) \\
& = & ((V \to F) \ \land \ ((F \land V) \to \neg V) \to \neg(V \land V) \\
& = & (\quad F \quad \land \quad (\quad F \quad \to \ F) \quad \to \quad \neg(V) \\
& = & (\quad F \quad \land \quad V) \quad \to \quad F \\
& = & F \quad \to \quad F \\
& = & V.
\end{array}
$$

Ma esiste una assegnazione di valori di verità agli atomi che renda A falsa? Evidentemente possiamo cercare tutte le possibili assegnazioni di valori di verità, ma esiste un metodo più interessante, detto dei *'semantic tableaux'*, che ha il merito di connettere la ricerca di un *controesempio* (un'assegnazione falsificante) ad una formula A con la costruzione di una prova di A nel caso in cui un controesempio non esista.

1.2 'Semantic Tableaux' e Calcolo dei Sequenti

Per definire la nostra procedura dobbiamo consierare le formule insieme ai *contesti deduttivi*: indichiamo con lettere greche maiuscole Γ, Δ insiemi finiti di formule proposizionali. Se $\Gamma = C_1, \ldots, C_m$ e $\Delta = D_1, \ldots, D_n$ allora una espressione formale $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è chiamata un *sequente*. Il significato intuitivo di $S : \Gamma \Rightarrow \Delta$ è $(C_1 \land \ldots \land C_m) \to (D_1 \lor \ldots \lor D_n)$, ma S va inteso essenzialmente come il contesto in cui una formula C_i o D_j viene valutata.

Qualora la procedura termini senza trovare un controesempio per A una *dimostrazione nel calcolo dei sequenti* sarà stata prodotta, che avrà la forma di un albero di sequenti costruito secondo gli assiomi e le regole di inferenza in Tavola 1.

1.2.1 Procedura semantic tableaux

La procedura "semantic tableaux" è un metodo che, data una formula proposizionale A, *trova una assegnazione $\mathcal{I}$ di valori di verità* agli atomi di A che *rende falsa* A, se una tale $\mathcal{I}$ esiste (e dunque A non è valida), oppure *costruisce una prova formale di $\Rightarrow A$ nel calcolo dei sequenti classico*, se A è valida. Si tratta dunque di un metodo sistematico per cercare una assegnazione falsificante senza considerare tutte le possibili assegnazioni di valori di verità. Essenzialmente, invertiamo le regole del calcolo dei sequenti nella forma data dalla Table 1, producendo un albero di sequenti. Il processo termina, perché ad ogni passo riduciamo la complessità logica di qualche formula nel sequente. Se nell'albero così prodotto tutte le foglie hanno la forma di un assioma, allora né le foglie né i sequenti dell'albero, e dunque neppure la conclusione $\Rightarrow A$, possono essere falsificati (perché le regole del calcolo dei sequenti *preservano*

assiomi

$$A, \Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

regole logiche

$$\textit{right } \neg\text{:}\ \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A} \qquad \textit{left } \neg\text{:}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\textit{right } \wedge\text{:}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \qquad \textit{left } \wedge\text{:}\ \dfrac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\textit{right } \to\text{:}\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta} \qquad \textit{left } \to\text{:}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\textit{right } \vee\text{:}\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B} \qquad \textit{left } \vee\text{:}\ \dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Table 1: Regole Proposizionali Classiche

la validità). Altrimenti consideriamo una foglia $\Gamma \Rightarrow \Delta$ che **non** ha la forma di un assioma: definiamo una assegnazione $\mathcal{I}$ ponendo $p_{\mathcal{I}} = V$ se e solo se $p \in \Gamma$ (cioè se p compare a sinistra di $\Rightarrow$). Le regole del calcolo dei sequenti hanno la proprietà che se una assegnazione $\mathcal{I}$ *falsifica* una premessa, allora $\mathcal{I}$ *falsifica* anche la conclusione. Dunque tutti i sequenti del ramo che inizia con $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e termina con la conclusione $\Rightarrow A$ della prova sono falsificati da $\mathcal{I}$.

1.2.2 Esempio

Consideriamo il seguente albero:

$$\text{(IV)}\ \dfrac{\text{(V)}\ \dfrac{r, p, \overline{q \ \Rightarrow\ \mathbf{q}} \qquad q, p, \overline{r \ \Rightarrow\ \mathbf{r}}}{q, r, p \ \Rightarrow\ \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}}\ \wedge\text{-R} \qquad \text{(VI)}\ \dfrac{q, r, \overline{p \ \Rightarrow\ \mathbf{p}}}{\neg \mathbf{p}, q, r, p \ \Rightarrow}\ \neg\text{-L}}{\mathbf{q}, (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \to \neg \mathbf{p}, r, p \ \Rightarrow}\ \to\text{-L}$$

$$\vdots$$

$$
\dfrac{\text{(I)}\,\dfrac{\text{(II)}\,\dfrac{\text{(III)}\,\dfrac{(q\wedge r)\to\neg p, r, \overline{p \Rightarrow \mathbf{p}} \qquad \vdots}{\mathbf{p}\to\mathbf{q}, (q\wedge r)\to\neg p, p, r \Rightarrow}\;\to\text{-L}}{(p\to q)\wedge((q\wedge r)\to\neg p), \mathbf{p}\wedge\mathbf{r}\Rightarrow}\;\wedge\text{-L, 2 volte}}{((p\to q)\wedge((q\wedge r)\to\neg p))\Rightarrow\neg(\mathbf{p}\wedge\mathbf{r})}\;\neg\text{-R}}{\Rightarrow((p\to q)\wedge((q\wedge r)\to\neg p))\to\neg(p\wedge r)}\;\to\text{-R}
$$

All'inizio della procedura, vogliamo trovare un'interpretazione $\mathcal{I}$ che renda falsa la formula $A : ((p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p)) \to \neg(p \wedge r)$, che scriviamo alla destra di $\Rightarrow$ nel sequente finale (la radice dell'albero che stiamo per costruire).

Per rendere A falsa, $\mathcal{I}$ deve rendere *vera* la formula $A_1 : (p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p)$ e *falsa* $A_2 : \neg(p \wedge r)$, cioè,

$$((p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p))_{\mathcal{I}} = T \qquad\qquad \neg(p \wedge r)_{\mathcal{I}} = F.$$

Per questo scriviamo il sequente $S_1 : A_1 \Rightarrow A_2$ subito sopra la radice. Si noti che nel far questo abbiamo *invertito la regola* $\to$-R.

Ora scegliamo una formula in S_1 da analizzare, diciamo A_2, che compare alla destra di $\Rightarrow$ in S_1 e dunque deve essere resa falsa da $\mathcal{I}$. Ma rendere $\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$ *falsa* significa rendere $\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}$ *vera*: dunque al passo (I) poniamo

$$((p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p))_{\mathcal{I}} = V \qquad\qquad (p \wedge r)_{\mathcal{I}} = V$$

e scriviamo il sequente $S_2 : (p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p), p \wedge r \Rightarrow$ sopra S_1. Ciò corrisponde ad invertire la regola $\neg$-L del calcolo dei sequenti.

Inoltre per rendere la congiunzione $((p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p))$ vera occorre rendere veri tutti i congiunti: dunque al passo (II) abbiamo

$$(p \to q)_{\mathcal{I}} = (q \wedge r) \to \neg p)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V$$

Abbiamo invertito la regola $\wedge$-L due volte.

Ora consideriamo $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$: possiamo rendere questa formula *vera* in due modi, o facendo $\mathbf{p}$ *falsa*, o facendo $\mathbf{q}$ *vera*. La procedura dunque ramifica al passo (III): da un lato vorremmo avere

$$\textit{Caso}\ \text{(III.i)} \qquad ((q \wedge r) \to \neg p)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V \qquad (p)_{\mathcal{I}} = F$$

e questo è impossibile, perché p non può essere allo stesso tempo vera e falsa, dall'altro ci occorre

$$\textit{Caso}\ \text{(III.ii)} \qquad (q)_{\mathcal{I}} = ((q \wedge r) \to \neg p)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V$$

Questo passaggio corrisponde all'inversione della regola $\to$-L.

Similmente trattiamo $(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \to \neg \mathbf{p}$: per rendere questa formula *vera* possiamo fare $(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})$ *falsa* oppure $\neg \mathbf{p}$ *vera*. Al passo (IV) la procedura ramifica nuovamente ed abbiamo

$$\textit{Caso (IV.i)} \qquad (q)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V \qquad ((q \wedge r)_{\mathcal{I}} = F$$

oppure

$$\textit{Caso (IV.ii)} \qquad (\neg p)_{\mathcal{I}} = (q)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V$$

Abbiamo ancora invertito la regola $\to$-L.

Nel Caso (IV.i) la procedura ramifica ancora: per rendere $\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}$ *falsa* possiamo porre rendere $\mathbf{q}$ *falsa* oppure $\mathbf{r}$ *falsa*; invertendo la regola $\wedge$-R, otteniamo le assegnazioni

$$\textit{Caso (V.i)} \qquad (r)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (q)_{\mathcal{I}} = V \qquad (q)_{\mathcal{I}} = F$$

e

$$\textit{Caso (V.ii)} \qquad (r)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (q)_{\mathcal{I}} = V \qquad (r)_{\mathcal{I}} = F$$

entrambe chiaramente impossibili; in questo modo chiudiamo la ricerca iniziata nel Caso (IV.i), concludendo che quella assegnazione falsificante non è possibile.

Ma anche il Caso (IV.ii) fallisce: infatti per rendere $\neg p$ *vera* occorre rendere p *falsa*; invertendo la regola $\neg$-L (passo VI), otteniamo l'impossibile assegnazione

$$(q)_{\mathcal{I}} = (p)_{\mathcal{I}} = (r)_{\mathcal{I}} = V \qquad (p)_{\mathcal{I}} = F$$

Dunque in ogni caso abbiamo verificato l'impossibilità di ottenere una assegnazione che falsifica il sequente iniziale e dunque concludiamo che il sequente è valido. L'albero considerato *è dunque una prova nel calcolo dei sequenti* **LK** per la logica classica.

2 Un'altro calcolo dei sequenti per la logica classica

Il calcolo dei sequenti presentato nella Tavola 1 è molto appropriato per la procedura semantica tratteggiata sopra. Il calcolo presentato nella Tavola 2 fornisce una rappresentazione equivalente della logica classica che ci aiuta a comprendere meglio la logica delle leggi scientifiche.

Non è difficile vedere che i due calcoli sono equivalenti. Per esempio, se in una prova nel primo calcolo compare un assioma della forma

$$C_1, C_2, A \to D_1, A$$

possiamo derivare quell'assimoa nel secondo calcolo così:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{A \to D_1, A}\,\text{W-R}}{C_2, A \to D_1, A}\,\text{W-L}}{C_1, C_2, A \to D_1, A}\,\text{W-R}$$

Similmente se in una derivazione che usa il primo calcolo compare la regola $\wedge$-R nella forma seguente

$$\frac{C_1 \Rightarrow D_1, D_2, A \qquad C_1 \Rightarrow D_1, D_2, B}{C_1 \Rightarrow D_1, D_2, A \wedge B}$$

possiamo derivare quella inferenza nel secondo calcolo come segue:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C_1 \Rightarrow D_1, D_2, A \qquad \Gamma \Rightarrow D_1, D_2, B}{C_1, C_1 \Rightarrow D_1, D_1, D_2, D_2, A \wedge B}}{C_1 \Rightarrow D_1, D_1, D_2, D_2, A \wedge B}\,\text{C-L}}{C_1 \Rightarrow D_1, D_2, D_2, A \wedge B}\,\text{C-R}}{C_1 \Rightarrow D_1, D_2, A \wedge B}\,\text{C-R}$$

2.0.3 Esempio (continuazione)

Riconsideriamo ora l'esempio studiato sopra nel nuovo calcolo.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p \;\Rightarrow\; \mathbf{p}} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{q \;\Rightarrow\; \mathbf{q}} \qquad \overline{r \;\Rightarrow\; \mathbf{r}}}{q, r \;\Rightarrow\; \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}}\,\wedge\text{-R} \qquad \dfrac{\overline{p \;\Rightarrow\; \mathbf{p}}}{\neg\mathbf{p}, p \;\Rightarrow}\,\neg\text{-L}}{\mathbf{q}, r, (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \to \neg\mathbf{p}, p \;\Rightarrow}\,\to\text{-L}}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, (q \wedge r) \to \neg p, p, r \Rightarrow}\,\to\text{-L}}{(p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p), \mathbf{p} \wedge \mathbf{r} \Rightarrow}\,\wedge\text{-L, 2 volte}}{((p \to q) \wedge ((q \wedge r) \to \neg p)) \Rightarrow \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})}\,\neg\text{-R}$$

Si noti che in questa derivazione non abbiamo fatto uso delle regole di *contrazione* e di *indebolimento* e neppure dell'assioma del falso $\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (*ex falso quodlibet*). Per questa ragione possiamo stabilire una corrispondenza stretta fra la struttura della prova ed il sequente finale: per esempio, tutti gli atomi che compaiono nella prova sono "discendenti" di qualche formula che compare negli assiomi del tipo $A \Rightarrow A$; il sequente finale è dunque dimostrabile solo grazie alle *connessioni tra atomi* stabilite da quegli assiomi; ciò impedisce che il sequente finale sia valido *a vuoto*. Evidentemente se avessimo usato le regole di indebolimento alcune formule sarebbero "irrilevanti' nel senso che non contribuirebbero a stabilire le essenziali connessioni tra atomi.

Inoltre nella nostra prova compaiono *due* assiomi della forma $p \Rightarrow p$, un assioma $q \Rightarrow q$ ed un assioma $r \Rightarrow r$; nel sequente finale l'atomo p compare *quattro* volte, e gli atomi q ed r compaiono due volte ciascuno; in altri termini, ogni occorrenza di un atomo nella formula finale può essere associato con un *unico* assioma. Evidentemente se avessimo usato le regole di contrazione non saremmo in grado di stabilire una corrispondenza così stretta tra gli atomi ed il loro uso negli assiomi.

3 Logica Lineare

La logica presentata nella tavola 3 è una variante della *logica lineare*. In uno slogan, questa logica è *rilevante*, e *consapevole delle risorse deduttive*. Dicendo che la logica lineare è rilevante intendiamo dire che non è ammesso il principio *dal falso segue qualsiasi cosa* e neppure le regola di *indebolimento*. La logica lineare non consente di dimostrare formule valide *a-vuoto*.

Dire che la logica lineare è "consapevole delle risorse deduttive significa dire che non sono ammesse né regole di indebolimento né regole di *contrazione* Per queste ragioni è ragionevole ritenere che la nozione di inferenza formalizzata dalla logica lineare sia appropriata per rappresentare la forma logica delle leggi scientifiche, in particolare delle leggi causali

Nell'articolo *Linear Logic: its syntax and semantics* J-Y. Girard mostra come rappresentare in logica lineare le equazioni che esprimono processi chimici. Per esempio, l'equazione chimica

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

può essere rappresentata come

$$(\alpha) \qquad\qquad H_2 \otimes H_2 \otimes O_2 \multimap H_2O \otimes H_2O$$

dove O_2 è una abbreviazione per $O \otimes O$, H_2 abbrevia $H \otimes H$ ed H_2O sta per $H_2 \otimes O$. Ora il processo chimico che trasforma idrogeno ed ossigeno in opportune proporzioni in acqua è rappresentato dalla prova seguente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{H_2 \Rightarrow \mathbf{H_2} \qquad H_2 \Rightarrow \mathbf{H_2}}{H_2, H_2 \Rightarrow \mathbf{H_2} \otimes \mathbf{H_2}} \qquad \dfrac{O \Rightarrow \mathbf{O} \qquad O \Rightarrow \mathbf{O}}{O, O \Rightarrow \mathbf{O} \otimes \mathbf{O}}}{H_2, H_2, O, O \Rightarrow \mathbf{H_2} \otimes \mathbf{H_2} \otimes \mathbf{O_2}} \qquad \mathbf{H_2O} \otimes \mathbf{H_2O} \Rightarrow H_2O \otimes H_2O}{H_2, H_2, O, O, (\mathbf{H_2} \otimes \mathbf{H_2} \otimes \mathbf{O_2}) \multimap (\mathbf{H_2O} \otimes \mathbf{H_2O}) \Rightarrow H_2O \otimes H_2O}\ \multimap\text{-L}}{H_2, H_2, O_2, (\mathbf{H_2} \otimes \mathbf{H_2} \otimes \mathbf{O_2}) \multimap (\mathbf{H_2O} \otimes \mathbf{H_2O}) \Rightarrow H_2O \otimes H2O}$$

Chiaramente se nella prova comparisseo l'Indebolimento e la Contrazione diventerebbe impossibile interpretare questa derivazione come una rappresentazione di processi chimici.

assiomi

$$A \Rightarrow A \qquad\qquad \bot, \Gamma \Rightarrow \Delta$$

regole strutturali

contrazione a sinistra:
$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

contrazione a destra :
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

regole strutturali

indebolimento a sinistra:
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

indebolimento a destra :
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

regole logiche

$\neg$ *a destra:*
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

$\neg$ *a sinistra:*
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$\wedge$ *a destra:*
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda, A \wedge B}$$

$\wedge$ *a sinistra:*
$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$\rightarrow$ *a destra:*
$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}$$

$\rightarrow$ *a sinistra:*
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

$\vee$ *a destra:*
$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$\vee$ *a sinistra:*
$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Pi \Rightarrow \Lambda}{A \vee B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Table 2: Un altro calcolo dei sequenti classico

assiomi

$$A \Rightarrow A$$

regole logiche

$\otimes$ *a destra:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Pi \Rightarrow \Lambda, B}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \ \Delta, \Lambda, A \otimes B}$$

$\otimes$ *a sinistra:*

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \otimes B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$\multimap$ *a destra:*

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \multimap B, \Delta}$$

$\rightarrow$ *a sinistra:*

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Lambda}{A \multimap B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Table 3: Regole Logica Lineare Moltiplicativa