# Logica proposizionale Compito 2

Gianluigi Bellin

November 10, 2011

## 1 Sequenti

Un *sequente* $S$ è una espressione formale astratta

$$S: \qquad A_1, \ldots, A_m \Rightarrow C_1, \ldots, C_n$$

L'insieme di formule $A_1, \ldots, A_m$ si chiama *antecedente*, l'insieme $C_1, \ldots, C_n$ il *succedente*.
Interpretiamo il sequente $S$ nella logica classica così:

$$S: \qquad A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \Rightarrow C_1 \vee \ldots \vee C_n$$

• Il sequente $S$ è *falsificabile* se per qualche valutazione $\mathcal{V}$ alle formule atomiche, $\mathcal{V}(A_1) = \ldots \mathcal{V}(A_m) = V$ e $\mathcal{V}(C_1) = \ldots \mathcal{V}(C_n) = F$; cioè la valutazione $\mathcal{V}$ rende tutte le formule nell'antecedente *vere* e tutte le formula nel succedente *false*.
• Il sequente $S$ è *valido* se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ alle formule atomiche, per qualche formula $A_i$ nell'antecedente, $\mathcal{V}(A_i) = F$ oppure per qualche formula $C_j$ nel succedente, $\mathcal{V}(C_m) = V$.

La procedura *semantic tableaux* è trattata nelle dispense disponibili sul sito del corso. Qui ci concentriamo su esempi delle regole dell'implicazione:

$$\begin{array}{cc} \textit{right} \rightarrow: & \textit{left} \rightarrow: \\ \dfrac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} & \dfrac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \qquad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \Rightarrow \Delta} \end{array}$$

**Note.** ($i$) (*linguaggio oggetto, metalinguaggio*) È importante notare la differenza tra i due simboli "$\rightarrow$" e "$\Rightarrow$": Il primo ($\rightarrow$) è un connettivo del *linguaggio* $\mathcal{L}$ *che stiamo studiando* (*linguaggio oggetto*), le cui formule sono definite dalla grammatica

$$\boxed{A, B \quad := \; p \mid \neg A \mid A \rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B}$$

Invece il secondo ($\Rightarrow$) è un simbolo formale che fa parte della definizione di *sequente*. Un sequente

$$S: \qquad A_1, \ldots, A_m \Rightarrow C_1, \ldots, C_n$$

è uno strumento che usiamo per studiare le proprietà del linguaggio oggetto $\mathcal{L}$, (per esempio, per vedere se due formule $A$ e $B$ di $\mathcal{L}$ sono logicamente equivalenti). Quando studiamo $\mathcal{L}$, il nostro discorso in italiano è il *metalinguaggio* rispetto al *linguaggio oggetto* $\mathcal{L}$. La procedura *"semantic tableaux"* ed i sequenti in essa, così come le tavole di verità, sono parte del discorso metalinguistico.

Quando abbiamo dato una spiegazione intuitiva del sequente $S$ dicendo che ha lo stesso significato della formula $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \rightarrow (C_1 \vee \ldots \vee C_n)$, in quel momento abbiamo dato una *interpretazione del metalinguaggio nel linguaggio oggetto.*

Viceversa, quando prendiamo una formula $A$ del linguaggio $\mathcal{L}$, assegnamo frasi in italiano agli atomi di $\mathcal{L}$ e dunque una frase in italiano alla formula $A$, allora stiamo interpretando il *linguaggio oggetto* nel *metalinguaggio.* Per esempio, poniamo $p =$ "*la porta è aperta* e $q =$ "*il gatto esce*"; allora alla formula $p \rightarrow q$ assegnamo la frase "*se la porta è aperta, il gatto esce*".

(*ii*) (*teoria della dimostrazione*) Quando abbiamo costruito un albero di sequenti $\tau$ e tutte le foglie sono sequenti validi, allora l'albero $\tau$ può essere visto come una derivazione, una *prova formale* del sequente finale. Lo studio delle prove, utilizzando formalismi come il calcolo dei sequenti, si chiama *teoria della dimostrazione.* Da questo punto di vista allora gli alberi $\tau$ sono gli oggetti del nostro studio, piuttosto che strumenti metalinguistici, ed il metalinguaggio è il nostro discorso in italiano su di essi. La distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio è molto importante in logica ed in informatica.

**Esempio 1.** Mostriamo che $(\neg B \rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \rightarrow B)$ è un sequente valido (il che comporta che $A \rightarrow B$ segue logicamente da $\neg B \rightarrow \neg A$).
Sia $A =$ *la porta è aperta*, $B =$ *il gatto esce*, voglio vedere se è logicamente possibile che la proposizione *"se il gatto non esce allora la porta non è aperta"* sia vera, e nello stesso tempo che la proposizione *"se la porta è aperta, allora il gatto esce"* sia falsa.

$$\dfrac{\dfrac{\text{3. } \dfrac{A, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}}{A \Rightarrow B, \neg\mathbf{B}}\ \neg\,\mathrm{R} \qquad \text{4. } \dfrac{\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}, B}{\neg\mathbf{A}, A \Rightarrow B}\ \neg\,\mathrm{L}}{\text{2. } (\neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A}), A \Rightarrow B}\ \rightarrow \mathrm{L}}{\text{1. } (\neg B \rightarrow \neg A) \Rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B})}\ \rightarrow \mathrm{R}$$

Leggiamo l'albero dal basso in alto.

1. Cerchiamo una falsificazione del sequente $(\neg B \rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \rightarrow B)$, cioè cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda $(\neg B \rightarrow \neg A)$ vera e $(A \rightarrow B)$ falsa. Analizziamo la formula nel succedente: è una implicazione (*regola* $\rightarrow$ R) ; per renderla falsa, occorre fare $A$ vera e $B$ falsa.

2. Dunque cerchiamo di falsificare il sequente $(\neg B \rightarrow \neg A), A \Rightarrow B$; cerchiamo una valutazione $\mathcal{V}$ che renda sia $(\neg B \rightarrow \neg A)$ che $A$ vere e $B$ falsa. Analizziamo la formula

$(\neg B \to \neg A)$ nell'antecedente (*regola* $\to$ *L*); per farla vera, occorre rendere falsa $\neg B$ oppure vera $\neg A$ (*due casi distinti*).

*Caso 1.* Per falsificare il sequente $A \Rightarrow \neg B, B$ occorre rendere $A$ vera e sia $\neg B$ che $B$ false. Ma rendere $\neg B$ falsa significa rendere $B$ vera (*regola* $\neg$ *R*) ed il sequente $A, B \Rightarrow B$ non è falsificabile: nessuna valutazione $\mathcal{V}$ può rendere $B$ sia vera che falsa.

*Caso 2.* Per falsificare il sequente $\neg A, A \Rightarrow B$ occorre rendere sia $\neg A$ che $A$ vere e e $B$ falsa. Rendere $\neg A$ vera significa rendere $A$ falsa (*regola* $\neg$ *L*); ma come sopra il sequente $A \Rightarrow A, B$ non è falsificabile.

In ogni caso la procedura fallisce: *tutte le foglie dell'albero sono sequenti validi*, e per la forma delle regole *tutte i sequenti nell'albero sono validi.*

**Esempio 2.** Mostriamo che $(p \to q \Rightarrow (q \to p)$ è un sequente falsificabile. Poniamo $p =$ *la porta è aperta* e $q =$ *il gatto esce.* Un ragionamento fallace corrispondente a questo sequente è il seguente.

Dal fatto che è vero che

- *se la porta è aperta, allora il gatto esce,*

segue logicamente che

- *se il gatto esce, allora la porta è aperta.*

Questo è falso: per esempio, supponiamo che il gatto esca appena può, preferibilmente dalla porta ma che possa uscire anche dalla finestra.

$$
1.\ \dfrac{2.\ \dfrac{\overset{\mathcal{V}}{q \Rightarrow p, p} \qquad \overset{\mathcal{V}}{q, q \Rightarrow p}}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, q \Rightarrow p}\ \to \mathrm{L}}{p \to q \Rightarrow \mathbf{q} \to \mathbf{p}}\ \to \mathrm{R}
$$

Dai due rami dell'albero otteniamo la stessa valutazione $\mathcal{V}$ che assegna $\mathcal{V}(p) = F$ e $\mathcal{V}(q) = V$ e falsifica tutti i sequenti dell'albero, in particolare il sequente-conclusione $\mathcal{V}(p \to q) = \mathcal{V}(p) \to \mathcal{V}(q) = F \to V = V$ ed inoltre $\mathcal{V}(q \to p) = \mathcal{V}(q) \to \mathcal{V}(p) = V \to F = F$ .

## 1.1 Soluzione ad alcuni esercizi.

**Parte (e)**

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A} \Rightarrow B, \mathbf{A}}{A, \neg\mathbf{A} \Rightarrow B}\ \neg \mathrm{L} \qquad \mathbf{B}, \neg A \Rightarrow \mathbf{B}}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}, \neg A \Rightarrow B}\ \vee \mathrm{L}}{(A \vee B) \Rightarrow (\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B})}\ \to \mathrm{R}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}, B}{\Rightarrow A, B, \neg\mathbf{A}}\ \neg \mathrm{R} \qquad \mathbf{B} \Rightarrow A, \mathbf{B}}{(\neg\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \Rightarrow A, B}\ \to \mathrm{L}}{(\neg A \to B) \Rightarrow (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})}\ \vee \mathrm{R}
$$

## Parte (m)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\mathbf{A} \Rightarrow C, \mathbf{A}, B}{A \Rightarrow C, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\vee \mathrm{R}
\qquad \mathbf{C}, A \Rightarrow \mathbf{C}
}{((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}), A \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow (\mathbf{A} \to \mathbf{C})}\to \mathrm{R}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\mathbf{B} \Rightarrow C, A, \mathbf{B}}{B \Rightarrow C, \mathbf{A} \vee \mathbf{B}}\vee \mathrm{R}
\qquad \mathbf{C}, B \Rightarrow \mathbf{C}
}{((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C}), B \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow (\mathbf{B} \to \mathbf{C})}\to \mathrm{R}
}{((A \vee B) \to C) \Rightarrow ((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C}))}\wedge \mathrm{R}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\mathcal{B}, \mathbf{A} \Rightarrow C, \mathbf{A} \qquad \mathbf{C}, \mathcal{B}, A \Rightarrow \mathbf{C}}{(\mathbf{A} \to \mathbf{C}), \mathcal{B}, A \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
\qquad
\dfrac{\mathcal{A}, \mathbf{B} \Rightarrow C, \mathbf{B} \qquad \mathbf{C}, \mathcal{A}, B \Rightarrow \mathbf{C}}{\mathcal{A}, (\mathbf{B} \to \mathbf{C}), B \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{(A \to C), (B \to C)), (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \Rightarrow C}\vee \mathrm{L}
}{((\mathbf{A} \to \mathbf{C}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C})), (A \vee B) \Rightarrow C}\wedge \mathrm{L}
}{((A \to C) \wedge (B \to C)) \Rightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \to \mathbf{C})}\to \mathrm{R}
$$

dove $\mathcal{B} = (B \to C)$, $\mathcal{A} = (A \to C)$.

## Parte (o)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\mathbf{A}, B \Rightarrow C, \mathbf{A}
\qquad
\dfrac{A, \mathbf{B} \Rightarrow C, \mathbf{B} \qquad \mathbf{C}, A, B \Rightarrow \mathbf{C}}{(\mathbf{B} \to \mathbf{C}), A, B \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{(\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C})), A, B \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{(A \to (B \to C)), (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \Rightarrow C}\wedge \mathrm{L}
}{(A \to (B \to C)) \Rightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{C})}\to \mathrm{R}
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\mathbf{A}, B \Rightarrow \mathbf{A} \qquad A, \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B}}{A, B \Rightarrow (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})}\wedge \mathrm{R}
\qquad \mathbf{C}, A, B \Rightarrow \mathbf{C}
}{((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{C}), A, B \Rightarrow C}\to \mathrm{L}
}{((A \wedge B) \to C), A \Rightarrow (\mathbf{B} \to \mathbf{C})}\to \mathrm{R}
}{((A \wedge B) \to C) \Rightarrow (\mathbf{A} \to (\mathbf{B} \to \mathbf{C}))}\to \mathrm{R}
$$

## Esercizion 2 (a)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\overset{\mathcal{V}}{A \Rightarrow C, B} \qquad \mathbf{A} \Rightarrow C, \mathbf{A}}{A \Rightarrow C, (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A})}\wedge \mathrm{R}
\qquad
\dfrac{B, \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{C}, (B \wedge A)}{(\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) \Rightarrow C, (B \wedge A)}\wedge \mathrm{L}
}{(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \Rightarrow C, (B \wedge A)}\vee \mathrm{L}
}{(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (\mathbf{C} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}))}\vee \mathrm{R}
$$

Supponiamo $A, B, C$ atomiche. Poniamo $\mathcal{V}(A) = V$, $\mathcal{V}(B) = \mathcal{V}(C) = F$. Allora il ramo più a sinistra dell'albero è falsificato da $\mathcal{V}$, in particolare la conclusione. Infatti

$$\mathcal{V}(A \vee (B \wedge C)) = \mathcal{V}(A) = V; \qquad \mathcal{V}(C \vee (B \wedge A)) = \mathcal{V}(C) \vee \mathcal{V}(B \wedge A) = F \vee F = F,$$

dato che $\mathcal{V}(B \wedge A) = \mathcal{V}(B) \wedge \mathcal{V}(A)) = F \wedge V = F$.