Semantic Tableaux per Logica dei Predicati. Esercizi.

Filosofia della Scienza - Gianluigi Bellin

November 12, 2013

Leggere le dispense "AI 2009 - Handout 2 First-Order Logic", sezione 3.

1. Si scrivano le regole per l'implicazione $\rightarrow$-R e $\rightarrow$-L del calcolo dei sequenti / semantic tableaux. Si verifichi la validità oppure la falsificabilità delle seguenti espressioni.

1. $A \rightarrow B \Rightarrow B \rightarrow A$;

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{V}}{B \Rightarrow A, A} \qquad \overset{\mathcal{V}}{B, B \Rightarrow A}}{A \rightarrow B, B \Rightarrow A} \Rightarrow \mathrm{L}}{A \rightarrow B \Rightarrow B \rightarrow A} \rightarrow \mathrm{R}$$

La valutazione $\mathcal{V}$ che si ottiene da entrambe le "foglie" aperte è

$$\mathcal{V}(B) = v \quad \mathcal{V}(A) = f.$$

Chiaramente $\mathcal{V}(A \rightarrow B) = v$ e $\mathcal{V}(B \rightarrow A) = f$.

2. Applicare la procedura Semantic Tableaux alle seguenti espressioni del calcolo dei predicati per mostrarne la validità e fornire una prova nel calcolo dei sequenti oppure per trovare una interpretazione che le falsifica.

1 $(\exists x.A(x)) \wedge (\exists y.B(y)) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))$.

4 $(\forall x.A(x) \vee B) \Rightarrow (\forall y.A(y)) \vee B$ se y non compare in B.

Esercizio 1.

$$\dfrac{\overset{\mathcal{M}_1}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), B(\mathbf{a}_1), A(\mathbf{a}_0)} \qquad \overset{\mathcal{M}_2}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), B(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_0)}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0), B(\mathbf{a}_1)}\ \wedge \mathrm{R}$$

$$\dfrac{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ \overline{A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1)} \quad \overset{\vdots}{\downarrow}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0), A(\mathbf{a}_1) \wedge B(\mathbf{a}_1), A(\mathbf{a}_2)}\ \wedge \mathrm{R}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\vdots}{\downarrow} \quad {}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), \overline{B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_i) \wedge B(\mathbf{a}_i)_{i=0,1}, B(\mathbf{a}_2)}, \ldots.}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_i) \wedge B(\mathbf{a}_i)_{i=0,1}, A(\mathbf{a}_2) \wedge B(\mathbf{a}_2)}\ \wedge \mathrm{R}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2;}\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists \mathrm{R}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;}\ A(\mathbf{a}_1), \exists y.B(y) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists \mathrm{L}}{{}_{\mathbf{a}_0;}\ \exists x.A(x), \exists y.B(y)) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists \mathrm{L}}{{}_{\mathbf{a}_0;}\ (\exists x.A(x)) \wedge (\exists y.B(y)) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \wedge \mathrm{L}$$

Questo albero ha due foglie aperte, dunque il sequente radice è falsificabile. Se cerchiamo un modello falsificante (*contromodello*) in una situazione del mondo, consideriamo la chiave di lettura

- $A(x) =$ "*x è maschio*" (nel senso legale del termine);
- $B(x) =$ "*x è femmina*" (nel senso legale del termine).

Poiché l'anagrafe richiede che le persone siano registrate o come maschi o come femmine, ma non entrambe, nel modo dell'anagrafe il sequente è falso. In effetti, basta considerare un insieme di due individui, iscritti all'anagrafe, uno maschio e l'altro femmina, per trovare un contromodello che lo falsifica.

Formalmente, dobbiamo costruire un modello $\mathcal{M} = (D, A_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}})$ tale che in $\mathcal{M}$ la proposizione $\exists x.A(x) \wedge (\exists y.B(y)$ sia vera e la proposizione $\exists z.(A(z) \wedge B(z))$ sia falsa. Poniamo

$$D = \{1, 2\} \quad A_{\mathcal{M}} = \{1\} \quad B_{\mathcal{M}} = \{2\}.$$

Allora

$$\begin{array}{rll}
\mathcal{M} \models \exists x.A(x) & \text{sse} & \text{esiste } a \in D \text{ tale che } \mathcal{M} \models A(x)[x := a]; \\
& \text{sse} & \text{esiste } a \in D \text{ tale che } a \in A_{\mathcal{M}}; \\
& \text{sse} & \textbf{vero} \text{ perché } 1 \in A_{\mathcal{M}}. \\
\mathcal{M} \models \exists y.B(y) & \text{sse} & \text{esiste } b \in D \text{ tale che } \mathcal{M} \models B(y)[y := b] \\
& \text{sse} & \text{esiste } b \in D \text{ tale che } b \in B_{\mathcal{M}}; \\
& \text{sse} & \textbf{vero} \text{ perché } 2 \in B_{\mathcal{M}}. \\
\mathcal{M} \models \exists z.A(z) \wedge B(z) & \text{sse} & \text{esiste } c \in D \text{ tale che } \mathcal{M} \models A(z) \wedge B(z)[z := c]; \\
& \text{sse} & \text{esiste } c \in D \text{ tale che} \\
& & \qquad \mathcal{M} \models A(z)[z := c] \text{ e } \mathcal{M} \models B(z)[z := c]; \\
& \text{sse} & \text{esiste } c \in D \text{ tale che } c \in A_{\mathcal{M}} \text{ e } c \in B_{\mathcal{M}}; \\
& \text{sse} & \textbf{falso} \text{ perché } 1 \in A_{\mathcal{M}} \text{ ma } 1 \notin B_{\mathcal{M}}, \\
& & \qquad 2 \in B_{\mathcal{M}} \text{ ma } 2 \notin A_{\mathcal{M}} \\
& & \text{e l'universo } D \text{ contiene solo gli individui 1 e 2.}
\end{array}$$

Mostriamo che essenzialmente lo stesso modello viene ottenuto dall'albero di falsificazione costruito dalla procedura. Ognuna delle "foglie" aperte può essere associata con un modello $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$; consideriamo il ramo associato con $\mathcal{M}_1$. Nel "sequente-foglia" compaiono tre termini $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ che possiamo considerare come *nomi* di elementi del dominio. Possiamo porre

$$D = \{0, 1, 2\} \quad A_{\mathcal{M}_1} = \{1\} \quad B_{\mathcal{M}_1} = \{2\} \quad \mathbf{a}_0 = 0, \mathbf{a}_1 = 1, \mathbf{a}_2 = 2.$$

Abbiamo posto un numero $i \in A_{\mathcal{M}_1}$ se e solo se $A(\mathbf{a}_i)$ *compare a sinistra in qualche sequente del ramo che stiamo considerando*, e similmente per $B_{\mathcal{M}_1}$. Allora abbiamo

$$\begin{array}{rll}
\mathcal{M}_1 \models \exists x.A(x) & \text{sse} & \text{esiste } a \in D \text{ tale che } \mathcal{M}_1 \models A(x)[x := a]; \\
& \text{sse} & \textbf{vero} \text{ perché } 1 \in A_{\mathcal{M}_1}; \\
& \text{sse} & \mathcal{M}_1 \models A(\mathbf{a}_1). \\
\mathcal{M}_1 \models \exists y.B(y) & \text{sse} & \text{esiste } b \in D \text{ tale che } \mathcal{M}_1 \models B(y)[y := b] \\
& \text{sse} & \textbf{vero} \text{ perché } 2 \in B_{\mathcal{M}_1}; \\
& \text{sse} & \mathcal{M}_1 \models B(\mathbf{a}_2). \\
\mathcal{M}_1 \models \exists z.A(z) \wedge B(z) & \text{sse} & \text{esiste } c \in D \text{ tale che } \mathcal{M}_1 \models A(z) \wedge B(z)[z := c]; \\
& \text{sse} & \text{esiste } c \in D \text{ tale che } c \in A_{\mathcal{M}_1} \text{ e } c \in B_{\mathcal{M}_1}; \\
& \text{sse} & \textbf{falso} \text{ perché } 0, 1 \notin B_{\mathcal{M}_1},\ 0, 2 \notin A_{\mathcal{M}_1} \\
& & \text{e l'universo } D \text{ contiene solo gli individui } 0, 1 \text{ e } 2.
\end{array}$$

Si noti che nel sequente finale i nomi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ non compaiono ed il nome $\mathbf{a}_0$ non è usato. Quindi i nomi sono solo strumenti ausiliari: per valutare il sequente finale basta interpretare il linguaggio $\mathcal{L} = (A, B)$ in un appropriato modello con un universo del discorso non-vuoto.

Esercizio 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{{\scriptstyle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1;}\ \ldots \overline{A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow\ A(\mathbf{a}_1)}, \ldots \qquad {\scriptstyle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1;}\ \ldots \overline{B \Rightarrow B} \ldots}{{\scriptstyle \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1;}\ A(\mathbf{a}_1) \vee B, A(\mathbf{a}_0) \vee B, \forall x.(A(x) \vee B) \Rightarrow\ A(\mathbf{a}_1), B}\ \forall\text{ L}}{{\scriptstyle \mathbf{a}_0;}\ \forall x.(A(x) \vee B) \Rightarrow\ \forall y.A(y), B}\ \forall\text{ R}}{{\scriptstyle \mathbf{a}_0;}\ \forall x.(A(x) \vee B) \Rightarrow (\forall y.A(y)) \vee B}\ \vee\text{ R}$$

L'albero è chiuso, tutti i sequenti in esso sono validi, i termini $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ sono variabili libere; l'albero è una dimostrazione nel calcolo dei sequenti di Gentzen per la logica dei predicati.