Soluzioni esercizio sul Calcolo dei Predicati

Filosofia della Scienza
Gianluigi Bellin

November 20, 2012

Esempio (i)

$$A(a_0), B(a_1) \Rightarrow B(a_0) \qquad\qquad A(a_0), B(a_1) \Rightarrow A(a_1)$$

$$\vdots$$

(completare l'esempio!)

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a_0), B(a_1) \Rightarrow A(a_0) \wedge B(a_0), A(a_1) \wedge B(a_1), \exists z.(A(z) \wedge B(z))}{A(a_0), B(a_1) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists\text{ R}}{A(a_0), \exists y.B(y) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists\text{ L}}{\exists x.A(x), \exists y.B(y) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists\text{ L}}{(\exists x.A(x)) \wedge (\exists y.B(y)) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \wedge\text{ L}$$

Analisi dell'esercizio (i): Analizzando le regole $\exists$ L devo introdurre sempre parametri "nuovi". Sopra la regola $\exists R$ non si può più applicare alcuna regola che generi nuovi parametri.
È un facile esercizio della procedura nel caso proposizionale mostrare che vi sono due rami aperti, uno ha una "foglia" $A(a_0), B(a_1) \Rightarrow B(a_0)$, da cui ricavo il modello $\mathcal{M} = (D, A_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}})$ dove

- $D = \{a_0, a_1\}$;
- $A_{\mathcal{M}} = \{a_0\}$, $B_{\mathcal{M}} = \{a_1\}$

Verifichiamo che questo modello falsifica il sequente finale:

- $\mathcal{M} \models \exists x.A(x)$ perché $\mathcal{M} \models A(a_0)$ (in quanto $a_0 \in A_{\mathcal{M}}$);
- $\mathcal{M} \models \exists y.B(y)$ perché $\mathcal{M} \models B(a_1)$ (in quanto $a_1 \in B_{\mathcal{M}}$);
- $\mathcal{M} \not\models \exists z.A(z) \wedge B(z)$:

  per $z = a_0$ abbiamo $\mathcal{M} \not\models A(a_0) \wedge B(a_0)$, perché $\mathcal{M} \not\models B(a_0)$ (in quanto $a_0 \notin B_{\mathcal{M}}$);

  per $z = a_1$ abbiamo $\mathcal{M} \not\models A(a_1) \wedge B(a_1)$, perché $\mathcal{M} \not\models A(a_1)$ (in quanto $a_1 \notin A_{\mathcal{M}}$);

Similmente possiamo costruire un modello dall'altro ramo aperto (esercizio!)

Esempio 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \Rightarrow A(a)}{A(a) \;\Rightarrow\; \exists x.A(x)}\ \exists\ \mathrm{R} \qquad B \Rightarrow B}{(\exists x.A(x)) \supset B, A(a) \Rightarrow\; B}\ \supset \mathrm{L}}{(\exists x.A(x)) \supset B \;\Rightarrow\; A(a) \supset B}\ \supset \mathrm{R}}{(\exists x.A(x)) \supset B \Rightarrow\; \forall y.(A(y) \supset B)}\ \forall\ \mathrm{R}$$

se y non compare in B.

Qui a è una variabile che non compare nel sequente finale.

Esempio 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A(a) \;\Rightarrow\; A(a)}{A(a), \sim A(a) \Rightarrow}\ \sim \mathrm{L}}{\forall x.A(x), \sim A(a) \Rightarrow}\ \forall\ \mathrm{L}}{\forall x.A(x), \exists y. \sim A(y) \Rightarrow}\ \exists\ \mathrm{L}}{\forall x.A(x) \;\Rightarrow \sim \exists y. \sim A(y)}\ \sim \mathrm{R}$$

Qui a è una variabile che non compare nel sequente finale.

Esempio 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ramo aperto!}}{A(a_0) \Rightarrow A(a_1)}}{A(a_0) \Rightarrow \forall x.A(x)}\ \forall\ \mathrm{R} \qquad B, A(a_0) \Rightarrow\; B}{(\forall x.A(x)) \supset B, A(a_0) \Rightarrow\; B}}{(\forall x.A(x)) \supset B \Rightarrow\; A(a_0) \supset B}\ \supset \mathrm{R}}{(\forall x.A(x)) \supset B \Rightarrow\; \exists y.(A(y) \supset B)}\ \exists\ \mathrm{R}$$

sequente non intuizionistico!

Analisi del terzo esempio: Procediamo alla ricerca di una prova "da sotto in sù", come nella procedura semantic tableaux classica.
Nell'inferenza $\exists$ R non possiamo ripetere la conclusione $\exists y.(A(y) \supset B)$ nella parte destra della premessa, per la restrizione intuizionistica.
Nell'inferenza $\forall$ R occore un parametro a_1 diverso da a_0 che compare già.
Tutti gli altri passi sono ottenuti invertendo le regole intuizionistiche e sono obbligati. Dunque non ottengo una deduzione intuizionistica. (Dal metodo ora applicato si può concludere che una deduzione intuizionistica non esiste. Ma non consideriamo la dimostrazione di questo fatto.)