Pitagorismo

Filosofia della Scienza
Gianluigi Bellin

13 Dicembre 2012

1 Pitagorismo antico.

La scuola Pitagorica era una scuola di matematici e scienziati, ma anche una congregazione religiosa che credeva nella reincarnazione e sembra aver assorbito alcune idee che troviamo anche nei culti orfici e dionisiaci. I pitagorici ritenevano che i rapporti numerici ed in particolare dai rapporti dati da numeri razionali (l'insieme denotato oggi da $\mathbf{Q}$), fossero l'essenza della realtà. Aristotele li criticherà per avere dato troppa importanza alle cause formali. La fiducia nel fatto che i numeri razionali fossero l'essenza della realtà fu scossa quando nella scuola pitagorica si scoprì che la radice quadrata di due è irrazionale. Per il teorema di Pitagora il numero $\sqrt{2}$ è la misura della diagonale di un triangolo rettangolo i cui cateti hanno misura 1; non si tratta dunque di un numero la cui esistenza possa essere messa in dubbio dai geometri greci.

1.1 Numeri razionali ed irrazionali.

Dimostriamo che la radice quadrata di due è irrazionale. Supponiamo che sia un numero razionale, poniamo $\sqrt{2} = a/b$ e supponiamo che a e b siano due interi primi tra loro. Allora $(a/b)^2 = a^2/b^2 = 2$ e dunque $a^2 = 2 \cdot b^2$. Ne segue (perch?) che a pari, diciamo $a = 2c$. Ma allora $2 \cdot c^2 = b^2$ e per lo stesso argomento segue che anche b è pari. Ma allora a e b non sono primi tra loro e questa è una contraddizione.

Il fatto che se a è un numero intero e a^2 è divisibile da un numero primo p, allora anche a è divisibile da p segue dal teorema fondamentale dell'aritmetica, per cui tutti i numeri interi sono decomponibili in un prodotto di numeri primi in un unico modo. Ma anche se i pitagorici non conoscevano il teorema fondamentale dell'aritmetica, il fatto che se a^2 è pari anche a è pari si dimostra direttamene: infatti supponiamo $a = 2d + 1$ dispari, abbiamo che anche $a^2 = 4d^2 + 4d + 1$ è dispari.

1.2 Armonia musicale e rapporti razionali

I pitagorici scoprirono una correlazione tra le altezze percepite dei suoni ed i rapporti, esprimibili in numeri razionali, tra le lunghezze delle corde vibranti o, negli strumenti a fiato, delle colonne d'aria vibranti. Essi considerarono questa scoperta come evidenza per la loro teoria che i numeri razionali sono l'essenza della realtà.

La differenza in altezza percepita tra due suoni si dice intervallo. Nella musica occidentale l'intervallo più piccolo generalmente usato è detto *semitono*; un *tono* corrisponde (circa) a due semitoni. Ricorda che la *scala musicale* occidentale moderna consiste della seguente successione di suoni, che viene iterata:

	$do\sharp$		$re\sharp$			$fa\sharp$		$sol\sharp$		$la\sharp$			...
	$\sim$		$\sim$			$\sim$		$\sim$		$\sim$			
	$re\flat$		$mi\flat$			$sol\flat$		$la\flat$		$si\flat$			
do		re		mi	fa		sol		la		si	do'	...

dove le note do, re, mi, fa, sol, la, si sono dette note naturali (scala naturale). L'intervallo tra due note naturali sempre di un tono eccetto che tra mi-fa e si-do dove di un semitono. Nella notazione musicale una nota $x\sharp$ con il diesis denota un suono superiore di un semitono di quello della nota x data; una nota $x\flat$ con il bemolle denota un suono superiore di un semitono di quello della nota x data. (In un pianoforte le note naturali si suonano sui tasti bianchi; i tasti neri danno i suoni intermedi a distanza di un semitono tra i due toni). La sequenza delle dodici note ciascuna a distanza di un semitono dalla precedente si chiama *scala cromatica*.

L'intervallo di *ottava* può essere definito come la distanza di sei toni. Nella scala naturale questa è la distanza tra una nota e l'ottava nota speriore che porta lo stesso nome (do-do').

Similmente l'intervallo di *quinta* può essere definito come la distanza di tre toni ed un semitono. Nella scala naturale questo è l'intervallo tra una nota e la quinta nota superiore, (do-sol, re-la), con l'eccezione dell'intervallo tra si-fa, che è di soli tre toni; dunque la nota una quinta sopra il si $fa\sharp$, non il fa naturale. L'intervallo di *quarta* (do-fa) è la distanza di due toni ed un semitono.

Nell'accordatura moderna degli strumenti tutti i semitoni sono intervalli uguali (*scala temperata*), dunque $do\sharp = re\flat$, ma questo non è vero delle scale in uso prima del XVIII secolo, ed in particolare della *scala pitagorica*.

1.3 La scoperta dei pitagorici

I pitagorici scoprirono che Il rapporto tra le lunghezze delle corde che producono una nota e quella dell'ottava superiore è di 2:1 ed inoltre il rapporto tra la lunghezza della corda che produce una nota e quella della quinta nota superiore è 3:2. Poich la frequenza dei suoni è inversa alla lunghezza della corda vibrante, ponendo uguale ad 1 la frequenza di una nota data, assegnamo all'ottava superiore frequenza 2, alla quinta 3/2. Per esempio, scrivendo $F(x)$ per la frequenza associata ad una nota, abbiamo $F(do') = 2 \cdot F(do)$ e $F(sol) = 3/2 \cdot F(do)$. Poichè la frequenza della quinta *inferiore* è 2:3, la frequenza della *quarta superiore* è di 4:3, per esempio $F(fa) = 4/3 \cdot F(do)$.

Nella scala pitagorica le frequenze delle altre note nella scala naturale sono calcolabili attraverso il *ciclo delle quinte*: $F(sol) = 3/2 \cdot F(do)$, $F(re') = 3/2 \cdot F(sol)$, ..., $F(fa\sharp) = 3/2 \cdot F(si)$ ed inoltre $F(si\flat) = 4/3 \cdot F(fa)$. Con questo procedimento nella scala pitagorica otteniamo le seguenti associazioni numeriche:

do	re	mi	fa	sol	la	si	do'
1	$3^2/2^3$	$3^4/2^6$	$2^2/3$	$3/2$	$3^3/2^4$	$3^5/2^7$	2

Tuttavia questo modo di calcolare le altezze delle note e di intonare gli strumenti conduce ad intervalli di semitono non uniformi. Si può infatti verificare che, per esempio $F(do\sharp) \neq F(re\flat)$, $F(re\sharp) \neq F(mi\flat)$, eccetera.

Va notato che i rapporti numerici delle frequenze sono decisivi anche nella determinazione del *timbro* dei suoni musicali, cioè la particolare qualità che distingue il suono dei diversi strumenti, (per esempio gli strumenti ad arco da quelli a fiato). Infatti il timbro è legato al fatto che la produzione di ogni suono in uno strumento produce anche *suoni armonici* di varia intensità: per esempio, la vibrazione di una corda produce anche vibrazioni delle parti della corda rappresentabili da un numero razionale, cioè della metà delle corda, di un terzo della corda, e così via.

Inoltre il particolare effetto psico-acustico che distingue un accordo musicale da un insieme arbitrario di suoni (*cluster*) è il fatto che in un accordo siamo ancora in grado di percepire i singoli suoni che lo compongono, mentre ciò non vale per un cluster. Si può dunque comprendere come la scoperta di correlazioni tra le armonie musicali ed i numeri razionali possa aver prodotto una grande sorpresa in coloro che per primi fecero questa scoperta.

1.4 Il temperamento equabile.

I modi di accordare gli strumenti derivati dalla scala pitagorica entrarono in conflitto con le esigenze espressive della musica moderna e vennero sostituiti nel corso del XVIII secolo dal temperamento equabile (usato da Bach nel *Clavicembalo ben temperato*) in cui tutte le 12 note della scala cromatica hanno lo stesso intervallo con la nota precedente. Si mostra facilmente che la differenza di frequenza associata ad un semitono deve essere la radice dodicesima di 2. Infatti se denotiamo con x il rapporto di frequenza tra suoni alla distanza di un semitono, abbiamo $F(do\sharp) = x \cdot F(do)$ e quindi passare all'ottava richiede di moltiplicare la frequenza data per x dodici volte, quante sono le note della scala cromatica. Dunque $F(do') = x^{12} \cdot F(do)$ e quindi $2 = F(do')/F(do) = x^{12}$ cioè $x = \sqrt[12]{2}$.

La differenza tra i diversi temperamenti degli strumenti è certamente percepibile con l'educazione e l'accordatura degli strumenti con metodi diversi dal temperamento equabile viene praticata comunemente dagli esecutori contemporanei di musica antica.