La scuola pitagorica - Storia 1

Gianluigi Bellin

December 22, 2010

Storia.

Di Pitagora sappiamo che nacque a Samo intorno al 570 aC., che viaggiò molto, anche in Egitto ed a Crotone, nel golfo di Taranto, fondò la sua scuola, che aveva un carattere scientifico, religioso e politico. Morì nel 497 aC. Non lasciò scritti; lo stesso Aristotele, che fu anche storico della filosofia pre-socratica, non conosceva il contributo specifico di Pitagora rispetto agli altri pitagorici.

Pitagora fece avanzare le scienze matematiche "oltre ai bisogni dei commerci", cioè verso la matematica pura.

La comunità pitagorica svolse anche un ruolo politico a Crotone, rappresentando forse ricchi artigiani e commercianti contro il ceto nobiliare.

La scuola pitagorica aveva aspetti simili ad una comunità *orfica*. Verso il I secolo aC. si accentuò il carattere mistico-religioso della scuola pitagorica.

Nota. A differenza del culto degli dei olimpici, che era anche religione delle città-stato (p.es., Atena era la protettrice di Atene), il culto orfico di Dioniso, diffuso tra schiavi e meticci, era proprio di comunità cui si accedeva par *iniziazione*. Attraverso *riti misterici* (vedi gli affreschi della Villa dei Misteri a Pompei) il fedele era portato ad identificarsi con il dio Dioniso che moriva sbranato dalle sue seguaci e rinasceva.

Nella teologia orfica, l'uomo ha in sè un elemento peccaminoso ed uno divino, l'anima; per una colpa originaria l'anima è imprigionata nel corpo e dopo la morte ritorna in un nuovo corpo (*metempsicosi*). Attraverso un codice di purezza di vita si può accellerare l'uscita "dal ciclo delle nascite e della miseria". Secondo il grande filosofo Friedrich Nietzsche è dai riti dionisiaci che nasce la tragedia greca.

I numeri sono il principio di tutte le cose.

Secondo Aristotele, il problema posto dai filosofi presocratici era quello del principio (l'$\alpha\rho\chi\eta$) di tutte le cose. Mentre per Talete il principio era l'acqua e per Anassimene l'aria, per i pitagorici l'$\alpha\rho\chi\eta$ sono i numeri (ed i rapporti razionali tra loro). Scrive Aristotele:

"Poiché i numeri sono per natura primi nelle matematiche, e nei numeri essi credevano di trovare, piú che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, somiglianze con le cose che sono e che divengono, e poiché vedevano espresse dai numeri le proprietà e i rapporti degli accordi armonici, poiché insomma ogni cosa nella natura appariva loro simile ai numeri, ed i numeri apparivano primi tra tutto ciò che è in natura, cosí pensarono che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose che sono e che il mondo intero fosse armonia e numero."

Secondo il testo di Dal Pra *Sommario di storia della filosofia* pp.8-11

- i pitagorici giunsero anzitutto a considerare i numeri come strutture quantitative indipendente dalla particolare natura dei singoli corpi; e studiarono le relazioni ed i caratteri dei numeri stessi;

- Consideravano orni numero come una collezione di unità ed ogni unità costituita da un punto fisico.

- Ad ogni numero possiamo associare una figura geometrica e studiare le proprietà geometriche come proprietà numeriche.

Dunque per i pitagorici “le cose cose si possono tutte considerare come costituite di un numero finito di punti e quindi tutte regolate da una quantità misurabile”, cioè misurabili nell’insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali.

Consideriamo i rapporti armonici. I pitagorici notarono che facendo vibrare parti di una corda secondo i rapporti 2/3 ed 1/2, si ottenevano note che sono la quinta e l'ottava della nota iniziale.

1	2/3	1/2	4/9
do	sol	do'	re'

Gli stessi rapporti valgono per le colonne d'aria che vibrano all'interno di un flauto, a seconda di quali fori sono lasciati chiusi o aperti.

È dunque possibile ottenere tutte le note della *scala naturale* attraverso le successioni di quinte. Considerando le *frequenze* delle vibrazioni, che sono in rapporto inverso alla lunghezza della corda sonora, e partendo dal fa (quinta nota sotto il do, lunghezza 3/2, frequenza 2/3 di quella del do) otteniamo

2/3	1	3/2	$3^2/2^2$	$3^3/2^3$	$3^4/2^4$	$3^5/2^5$	$3^6/2^6$
fa^{-1}	do	sol	re'	la'	mi''	si''	fa$\sharp$'''

riportando tutti i valori delle frequenza nella stessa ottava abbiamo

1	$3^2/2^3$	$3^4/2^6$	4/3	3/2	$3^3/2^4$	$3^5/2^7$	2
do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Si noti ora che otteniamo i seguenti *rapporti di semitono*:

- tra fa$\sharp$ e fa è $\frac{3^6/2^9}{3^4/2^6} = 3^2/2^3 = 9/8 = 1,125$;

- tra fa e mi è $\frac{4/3}{3^4/2^6} = 2^8/3^5 = 256/243 \approx 1,053$;

- fra do$\sharp$ e do è $3^7/2^{11} = 2187/2048 \approx 1,067$.

In particolare otteniamo che fa$\sharp \neq$ sol$\flat$, ecc.

I rapporti razionali non bastano!

La scoperta che esistono grandezze incommensurabili, cioè che il sistema numerico non può ridursi all'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali (classi di equivalenza di frazioni tra naturali) è una conseguenza immediata del Teorema di Pitagora, e venne infatti scoperta all'interno della scuola pitagorica. Tale scoperta costituiva una confutazione della teoria dei numeri naturali come atomi.

Teorema. *La radice quadrata di 2 non è un numero razionale.*

Prova. Supponiamo $2 = p^2/q^2$, con p, q numeri interi. Possiamo assumere che p e q *siano primi tra loro*, cioè non divisibili da alcun numero naturale. Allora

$$p^2 = 2q^2 \tag{1}$$

Ne segue che p deve essere un numero pari: infatti se nella decomposizione in fattori primi $p = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ non comparisse $p_1 = 2$ allora anche $p^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{2\alpha_n}$ sarebbe dispari. Dunque possiamo scrivere $p = 2r$ ed otteniamo $4r^2 = 2q^2$, cioè

$$q^2 = 2r^2 \tag{2}$$

Ripetendo lo stesso argomento otteniamo che anche q deve essere un numero pari, $q = 2s$ Ma allora p e q non sono primi fra loro, contraddizione.

Anche nella musica classica compaiono rapporti di frequenza irrazionali.

Il fatto che il rapporto di semitono tra le note della scala naturale non sia unico, impedisce di *trasporre una melodia in una tonalità lontana* (p. es., le tonalità di do e di do diesis).

Nel moderno *temperamento equabile* tutti i rapporti di semitono devono essere $\sqrt[12]{2} = 2^{1/12}$ ed i rapporti di frequenza nella scala diventano

1	$2^{1/6}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$2^{7/12}$	$2^{9/12}$	$2^{11/12}$	2
do	re	mi	fa	sol	la	si	do'

Questo sistema era stato descritto da Aristosseno di Taranto intorno al 320 a.C.

È quando nella musica occidentale si sviluppò come essenziale la pratica della modulazione tra tonalità anche lontane che divenne necessario intonare gli strumenti secondo una scala diversa da quella naturale. La grande opera di J.S.Bach *Il clavicembalo ben temperato* è appunto una dimostrazione delle possibilità offerte al musicista da una tecnica di accordatura degli strumenti che consentisse di suonare in tutte le tonalità. Non è però noto con certezza quale sistema di temperamento fosse usato da J.S.Bach.

Da un lato l'accordatura secondo il temperamento equabile moderno non era facile da ottenere in pratica: solo nel 1917 W.B. White arrivò a sviluppare un metodo praticamente utilizzabile per accordare un pianoforte secondo un temperamento equabile rigoroso. Dall'altro, i suoni armonici riproducono la scala naturale e per questo occorrono aggiustamenti per gli strumenti a fiato (nel corno si usa ancor oggi la pratica - attestata nel 1750 - di correggere i suoni inserendo la mano destra nel padiglione dello strumento).

Le differenze tra la scala naturale e quella temperata sono udibili da orecchi educati e non furono subito accettate per ragioni estetiche; per la pratica odierna della musica antica si costruiscono organi che consentano di suonare sia nel temperamento naturale che in quello in uso nella musica del rinascimento e nella età barocca.