Compito 3 - Filosofia 2010 -11

Gianluigi Bellin

March 8, 2011

1 Domanda 1 - Probabilità

Consideriamo un insieme Ω ed un Insieme $\mathbf{F}$ di sottoinsiemi di Ω tale che

- Ω appartiene a $\mathbf{F}$;
- se A appartiene ad $\mathbf{F}$, allora $\overline{A}$, il complemento di A appartiene ad $\mathbf{F}$;
- Se $A_1, A_2, \ldots$ è una sequenza (possibilmente infinita) di sottoinsieni di $\mathbf{F}$ a due a due dusgiunti (cioè per $i \neq j$ abbiamo $F_i \cap F_j = \emptyset$) allora l'unione $\bigcup_j A_j$ appartiene ad $\mathbf{F}$. (In pratica, consideremo solo unioni finite.)

Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali. Una funzione $P : \mathbf{F} \to \mathbf{R}$ si dice una *funzione di probabilità* se soddisfa i seguenti assiomi:

1. $P(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathbf{F}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. se A_1, A_2 sono insiemi disgiunti in $\mathbf{F}$ allora $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (e similmente per le unioni infinite);

Dunque $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ e vale $P : \mathbf{F} \to [0, 1]$ per ogni funzione di probabilità P. Si può dimostrare che per unioni di eventi arbitrari vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \& B)$.
I sottoinsiemi di $\mathbf{F}$ possono essere pensati come eventi o anche come proposizioni che descrivono eventi. In questo caso l'evento Ω è un evento certo denotato da una proposizione valida $\top$ e le funzioni di probabilità si possono pensare come assegnate alle proposizioni della grammatica seguente (dove la disgiunzione denota unioni finite di eventi):

$$A, B \ := \ P \mid \top \mid \overline{A} \mid A \vee B$$

Possiamo poi definire $A\&B =_{def} \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$, ed applicare le regole della logica stipulando che *se A e B sono logicamente equivalenti, allora* $P(A) = P(B)$.

Definiamo la probabilità condizionale $P_B(A)$ (scritta più usualmente come $P(A/B)$ oppure $P(A|B)$ con la formula seguente: se $P(B) > 0$, allora

$$P_B(A) = \frac{P(A\&B)}{P(B)}.$$

Ne segue che se $P(B) > 0$ allora $P(A\&B) = P(B) \cdot P_B(A)$.
(1) **Si dimostri**: Se $P(E) > 0$ e $P_E(B) > 0$ allora

$$P_{B\&E}(A) = \frac{P_E(A\&B)}{P_E(B)}$$

(2) **Si dimostri la Regola di Bayes:** Se $P(E) > 0$ allora

$$P_E(H) = \frac{P(H) \cdot P_H(E)}{P(H) \cdot P_H(E) \ + \ P(\overline{H}) \cdot P_{\overline{H}}(E)}$$

2 punti

1.1 Domanda 2

Stadio (i), informazioni a priori. Richard è un giovane uomo di 14 anni e nella regione in cui abita solo sei giovani della sua età su centomila hanno l'appendicite in un dato momento. Dunque, scrivendo E per "Richard è un giovane uomo di 14 anni" ed A per l'ipotesi "Richard ha l'appendicite", vale

$$P_E(A) = 6/10^5.$$

Più frequenti tra i giovani di quella regione sono le intossicazioni alimentari. Scrivendo C per l'ipotesi "Richard ha una intossicazione", dai dati a disposizione possiamo dire che

$$P_E(C) = 9/10^5.$$

Stadio (ii) dati a posteriori ed una partizione. Poi apprendiamo che Richard ha alcuni sintomi tra cui (V) il vomito. Da quello che sappiamo, la probabilità che Richard abbia vomiti se avesse l'appendicite è alta:

$$P_{A\&E}(V) = 8/10.$$

Ma la probabilità che abbia vomiti in caso di intossicazione alimentare è ancora più alta:

$$P_{C\&E}(V) = 9/10.$$

A questo punto possiamo escludere che Richard sia sano e le sole ipotesi ragionevoli sono due, che Richard abbia o l'appendicite o una intossicazione alimentare.

Stadio (iii) ulteriori dati a posteriori. Infine il medico lo visita e dai dati D ottenuti dalla visita conclude che

$$P_{A\&V\&E}D = 0,6;$$

$$P_{C\&V\&E}D = 0,02.$$

Applica ripetutamente la regola di Bayes per valutare la probabilità che Richard abbia l'appendicite o un'intossicazione alimentare agli stadi (ii) e (iii), cioè **si determinino** prima i valori $P_{V\&E}(A)$ e $P_{V\&E}(C)$ e poi i valori $P_{D\&V\&E}(A)$ e $P_{D\&V\&E}(C)$.

punti 4

1.2 Domanda 3

Facciamo dieci lanci con moneta truccata che dà testa con probabilità di 3/4. **Si calcolino** i valori della funzione di probabilità $P10(k)$, per $k = 1, \dots 10$, *la probabilità di ottenere k teste su* 10 *lanci.* Si usi la formula dimostrata in classe per ciascun caso.

punti 3

Qual è il *valore medio* e la *deviazione standard* della funzione $P_{10}(k)$?

punti 2